A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Játsszunk néhány matematikai ideával I.

(Dienes Zoltán)

A törtek fogalmának kialakításáról

(Peller József)

Új tankönyv a 2003/2004-es tanévre – Sokszínű matematika 11. osztály

XI. ÉVFOLYAM 2003 1

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1200 Ft

A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Beszámoló a GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről
Polcz Katalin tanár – Poronyi Gábor igazgató, Pécs

80 éves Czapáry Endre, a matematika tanára
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Játsszunk néhány matematikai ideával I.
Dienes Zoltán professzor, Kanada

A törtek fogalmának kialakításáról
Peller József docens, Budapest

Megjegyzés a KöMal Füzetek 1.-hez
Dr. Kántor Sándorné adjunktus, Debrecen

Feladatrovat tanároknak

Új tankönyv a 2003/2004-es tanévre

Sokszínű matematika 11. osztály

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Polcz Katalin – Poronyi Gábor

Beszámoló a GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről

A pécsi matematikatanárok kezdeményezésére 1996-ban megyei versenyként indult, a következő évtől kétfordulós (megyei/körzeti verseny, majd országos döntő Pécsett) GORDIUSZ feleletválasztós tesztversenyre 2002-ben az ország tizenkilenc megyéjéből, Budapest négy körzetéből, Erdélyből, Kárpátaljáról és Vajdaságból 11 200 középiskolás nevezett.

Az első fordulóban és a döntőben is 90 perc alatt 30 (évfolyamonként különböző) feladatot kellett megoldani és öt válaszból az egyetlen helyeset kiválasztani. A feladatsorokat *Bereczkiné Székely Erzsébet* (9. évf.), *Sáráné Dombi Anna* (10. évf.), *Poronyi Gábor* (11. évf.) és *Polcz Katalin* (12. évf.) állította össze.

A Pécsett április 6-án megrendezett döntőre 85 iskola 188 versenyzője kapott meghívást. A Leőwey Klára Gimnáziumban volt az ünnepélyes megnyitó, ezt követte a verseny. Amíg a döntő tartott, a kísérő tanároknak *dr. Urbán János* tartott előadást. A színvonalas versenyt közös feladatmegoldás követte; a versenyzők és kísérőik részére városnézés, mecseki séta, a Szélkiáltó együttes koncertje egészítette ki a programot.

A válaszok számítógépes kiértékelése után másnap, április 7-én a Pécsi Művészeti Szakközépiskola hangversenytermében volt az eredményhirdetés, melyen *dr. Urbán János* köszöntötte a résztvevőket és a művészetis diákok adtak műsort. Minden döntős versenyző oklevelet kapott, az első tizenkét helyezett jutalmat is. Az első helyezettek díját *dr. Kékes Ferenc*, a Baranya Megyei Közgyűlés elnöke adta át.

A díjazott versenyzők:

9. évfolyam:

1. Tassy Gergely, Veres Péter Gimnázium, Budapest
2. Gosztonyi Balázs, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest
3. Strenner Balázs, Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
4. Czank Tamás, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
5. Jancsó Sándor, Árpád Vezér Gimnázium, Sárospatak
6. Pálinkás Csaba, Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok
7. Balázs Zoltán, Dobó István Gimnázium, Eger
8. Seres Gyula, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, Budapest
9. Steller Gábor, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest
10. Pesti Veronika, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
11. Poronyi Balázs, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
12. Vass Márton, Eötvös József Gimnázium, Budapest

10. évfolyam:

1. Dányádi Zsolt, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
2. Kórus Péter, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
3. Pongrácz András, Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok

4. Egri Attila, Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
5. Tolnai Gábor, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
6. Hudáky Zsuzsanna, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
7. Lechner Ádám, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
8. Csorba Beáta, Neumann János Közgazdasági Szakközépiskola, Eger
9. Matyuska Ferenc, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
10. Sebó Andrea, Erdei Ferenc Szakközépiskola, Makó
11. Hegyháti Máté, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
12. Szalaga Ágota, Krúdy Gyula Gimnázium, Nyíregyháza

11. évfolyam:

1. Lang Péter, Révai Miklós Gimnázium, Győr
2. Gáthy Lajos, Zalka Máté Gimnázium, Fehérgyarmat
3. Csóka Endre, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
4. Fehér Ádám, Révai Miklós Gimnázium, Győr
5. Nagy Gábor, Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
6. Vehovszky Balázs, Piarista Gimnázium, Budapest
7. Ruppert László, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
8. Kovács István, Berze Nagy János Gimnázium és Szakközépiskola, Gyöngyös
9. Metzing András, Leőwey Klára Gimnázium, Pécs
10. Dániel Dénes, Vörösmarty Mihály Gimnázium, Érd
11. Dóka Zsuzsanna, Lévai J. Református Gimnázium, Miskolc
12. Reiss Tibor, Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét

12. évfolyam:

1. Balogh János, Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
2. Hamar Gergő, Illyés Gyula Gimnázium, Dombóvár
3. Péterfalvi Ferenc, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
4. Koreck Ferenc, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
5. Pszota Zsolt, Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium, Vác
6. Jesch Dávid, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
7. Kőrizs András, Veres Péter Gimnázium, Budapest
8. Farkas Viktor, Varga Katalin Gimnázium, Szolnok
9. Tóth Ágnes, Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
10. Kádas Attila, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba
11. Iván Szilárd, Bolyai János Gimnázium, Kecskemét
12. Dömötör Csilla, Révai Miklós Gimnázium, Győr

Pécs Megyei Jogú Város különdíját *Meixner András*, a Közoktatási és Ifjúsági Bizottság elnöke adta át az egyes évfolyamokon legjobban szerepelt határon túli versenyzőknek: Szathmári Balázsnak (Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti), Sipos Tamásnak (Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad), Szilágyi Mártának (Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár), Bartha Ágnesnek (Nagy Mózes Líceum, Kézdivásárhely).

A legjobb baranyai versenyző, Péterfalvi Ferenc (Janus Pannonius Gimnázium, Pécs) a Baranyai Pedagógiai Szakszolgálatok és Szakmai Szolgáltatások Központjának különdíját vette át *Kucsanda Ibolya* igazgatónőtől.

A MATEK Alapítvány és a szervező bizottság különdíját kapták Poronyi Gábortól azok a végzős diákok, akik négyszer voltak a döntő résztvevői: Kádas Attila (Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba), Major Gergely (Eötvös József Gimnázium, Tata), Péterfalvi Ferenc (Janus Pannonius Gimnázium, Pécs), Pszota Zsolt

(Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium, Vác), Tóth Ágnes (Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló).

Sok más információ mellett a teljes eredménylista megtalálható a verseny honlapján: www.extra.hu/gordiusz-matek.

Az alábbiakban a döntő feladatsoraiból mutatunk meg ízelítőül néhányat.

1. Amikor Pécsett megnyitották a Vasarely Múzeumot, a Zsolnay Múzeum már 48 éve fogadta a látogatókat. A Vasarely Múzeum 2001-ben volt 25 éves. Melyik évben lesz 100 éves a Zsolnay Múzeum?

(A) 2076; (B) 2054; (C) 2042; (D) 2028; (E) 2002

2. A 6. osztályos Pannika azt a házi feladatot kapta, hogy szorozza össze az iskolában megoldott feladat végeredményének számjegyeit. Miután kiszámolta, megmondta nővérének; aki nem látta a feladatot. Azt felelte neki, hogy rosszul számolt. Mit mondhatott Pannika az alábbiak közül, ha a nővérének igaza volt?

(A) 162; (B) 210; (C) 462; (D) 1225; (E) 2000

3. Egy téglalapot, amelynek két oldala 42 cm és 35 cm, hét egyenlő területű részre osztottunk fel hat olyan egyenessel, amelyek mindegyike átmegy a téglalap ugyanazon csúcsán. Hány cm (két tizedes pontossággal) az egyenesek téglalapba eső szakaszai közül a leghosszabb?

(A) 50,00; (B) 50,21; (C) 51,61; (D) 53,15; (E) 64,92

4. Egy négyjegyű szám két 3-asra végződik. Ha az utolsó 3-ast elhagyjuk, akkor egy háromjegyű számot, ha mindkettőt elhagyjuk, akkor egy kétjegyű számot kapunk. Az eredeti és ezen számok összege 2034. Az eredeti szám számjegyeinek összege:

(A) 11; (B) 12; (C) 13; (D) 14; (E) 15

5. A Kocka utcai iskolában 8 tanuló jutott az iskolai matematika tesztverseny döntőjébe, lányok és fiúk vegyesen. A döntőben a lányok háromötöd része legalább a feladatok felét hibátlanul oldotta meg. Hány fiú szerepelt a döntőben?

(A) 6; (B) 5; (C) 4; (D) 3

(E) Ezekből az adatokból nem számítható ki.

6. Ha az $f(x) = x^2 + bx + c$ másodfokú függvény minimuma –3, zérushelyeinek összege 2, akkor $f(3) =$

(A) 3; (B) 1; (C) – 1; (D) – 2; (E) – 3

7. Egy egységnyi oldalú szabályos hatszög középpontja köré rajzoljunk egy r sugarú K kört

$$\left(\frac{1}{2} \le r < \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

majd minden csúcsa köré egy olyan kört, amely K-t érinti. A hét kör lefedi a hatszög egy részét. Hány egység r, ha a lefedett rész területe a legkisebb?

(A) $\frac{2}{3}$; (B) $\frac{7}{12}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{3}{4}$; (E) 0,6

8. Egy 1 g tömegű papírlapot félbevágunk, majd az egyik féllapot újra elfelezzük, és így tovább. Legalább hányszor kell ezt a felezést (elméletben) elvégeznünk, hogy akkora lapocskát kapjunk, amelynek tömege 1 atom tömegénél (10^{-24} g-nál) kisebb?

(A) 9; (B) 24; (C) 25; (D) 80; (E) 81

9. Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Tekintsük minden $n = 2, 3, \ldots$ esetén azt az e_n egyenest, amelynek egyenlete $a_n x + a_{n-1} y + 1 = 0$. Ha e_n és e_{n+1} minden n esetén merőleges egymásra, akkor mivel egyenlő az $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2002}$?

(A) –3; (B) 0; (C) 1; (D) 2; (E) 3

10. A nekeresdi kézilabda bajnokságot 14 csapat részvételével rendezik. Az őszi idényben (amikor minden csapat az összes többivel egy mérkőzést játszott) az első három helyezett csapat összesen annyi pontot szerzett, mind az utolsó kilenc. Legfeljebb hány mérkőzés végződhetett döntetlenül? (Kézilabdában a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pontot adnak.)

(A) 91; (B) 40; (C) 36; (D) 26; (E) 13

(Megoldókulcs: BCCEA DADEB)

Csete Lajos

80 éves Czapáry Endre, a matematika tanára

1. Életéről

Czapáry Endre 1922. július 31-én született Alibánfa községben. Alibánfa Zala megyei község Zalegerszegtől észak-keletre néhány kilométerre a Zala folyó partján. Az 1930. évi népszámlálás adatai szerint a faluban 86 ház volt és a lakosainak száma 442 fő.

Szülei Czapáry Jenő és Takács Mária. Czapáry Jenő tanító volt 1906–1912 között Nova községben, majd 1912–1946-ig Zalaapáti községben. Czapáry Jenő tanítói munkájában precíz ember volt, rendet és fegyelmet tartott az iskolában. Jó orgonista volt, dalárdát szervezett. Hitelszövetkezetnek végezte a könyvelését, a faluban gyümölcstermesztésre tanította a népeket. Czapáry Jenő erősen magyar érzelmű ember volt, az 1930-as években a család a nevét is magyarosította. Martincsevics Jenő helyett így lett Czapáry Jenő. A fiának, Czapáry Endrének 16 éves koráig Martincsevics Endre volt a neve. Czapáry Jenő édesapja Martincsevics Ferenc tanító volt, az ő édesapja Martincsevics Imre csizmadiamester volt. A csizmadiamester felesége Czapáry Anna és az ő nevét vette fel később a család.

Czapáry Endre édesanyja Takács Mária családja az Alibánfa melletti Lukafa községbe való. Czapáry Endrét 1922 és 1933 között Zalaapátiban nevelték három leánytestvérével együtt. Gondtalan, falusi élményekben gazdag gyermekélete volt.

Középiskolai tanulmányait 1933–1941 között végezte a Zalaegerszegi Magyar Királyi Állami Deák Ferenc Reálgimnáziumban. 1941-ben kitűnő eredménnyel érettségizett az említett intézményben, amely most a Zrínyi Miklós Gimnázium nevet viseli.

A matematika és fizika tantárgyakat szenvedélyesen szerette, ezeket Sanits Géza tanár úr kedveltette meg, emellett a német és a francia nyelvet sajátította el átlagon felüli színvonalon. Egyetemi tanulmányait 1941–1946 között végezte matematika-fizika szakon a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetemen az Eötvös Kollégiumban. Közben 1943-44-ben az egyetem Gyakorlati Fizikai Intézetének gyakornoka.

Ekkor nem akárki volt ott a fizika professzora, maga Békésy György (1899–1972) professzor, aki 1961-ben elnyerte az orvosi Nobel-díjat a hallás területén végzett kutatásaival, Békésy professzor intézetébe Cornides István tanársegéd ajánlotta be Hódi Endrével együtt. Cornides István spektroszkópiai kutatásokkal foglalkozott. Itt a gyakornokok feladata főként az volt, hogy a fizikai laboratóriumi gyakorlataikat végző tanárszakos hallgatóknak segítsenek. Másrészt tovább kellett fejleszteni a kísérleti lehetőségeket. Czapáry Endre egy fényhullámhosszmérést tartalmazó gyakorlatot fejlesztett.

Békésy György professzornak az volt az eszméje, hogy egy hét se múljon el anélkül, hogy produktív dolgot ne műveljen. Ezt az elvet valósította meg a gyakornokainál is, hetente kikérdezte őket, hogy mit olvastak, mit végeztek. Később Békésy professzor a háborúban megmentette a kísérleti fizikai eszközöket. Cornides István irányításával Czapáry Endre, Hódi Endre, Marton Kálmán, Veszprémi Tibor gyakornokok letelepítették az eszközöket a Múzeum körúton levő intézet 2. emeletéről az alagsorba. Így

a belövések alkalmával nem sérültek meg az eszközök.

Czapáry Endrét 1944 őszén a szombathelyi híradózászlóaljhoz vonultatták be IV. éves egyetemi hallgatóként. 1944 december végén már Brémától nyugatra Oldenburgba helyezték az alakulatot. Majd Hamburgtól nem messze az Elba mellett erődítményvonalat építettek. 1945. május 9-én estek angol fogságba. Czapáry Endre és Fábián Pál nyelvész 1946 februárjában ért haza Magyarországra, miután a német Ruhr-vidéken levő angol fogolytáborból megszöktek.

Czapáry Endre 1946-ban szerzett matematika-fizika szakos tanári oklevelet a Pázmány Péter Tudományegyetemen. Szombathelyen 1947 és 1960 között a Faludi Ferenc Gimnáziumban tanított, amelyet a premontreiek gimnáziumával való összevonás után Nagy Lajos Gimnáziumnak neveztek. A szombathelyi csillagvizsgáló megindítása érdekében eredményes munkát végzett. Szombathelyen a helyi Bolyai János Matematikai Társulat titkára 1951 és 1960 között. A Matematikai Lapok és A Matematika Tanítása, a Középiskolai Matematikai Lapok folyóiratok feladatmegoldója, illetve feladatkitűzője. 1957-ben Vas megyei matematika szakfelügyelőnek nevezték ki.

Majd 1960-tól 1964-ig az Eötvös Loránd Tudományegyetem Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumában tanít, ahol vezető tanár.

1964-től 1970-ig az ELTE Geometriai Tanszékének oktatója adjunktusi beosztásban. A berlini Humbolt Egyetemen 1967-ben egy hónapig ösztöndíjjal tartózkodik. Itt a németek az iránt érdeklődnek erősen, hogy Magyarországon miképpen tanítják az analízis elemeit a középiskolákban.

Ezután a győri Révai Miklós Gimnázium tanára 1970-től 1982-es nyugalomba vonulásáig. Ezen idő alatt középiskolai szakfelügyelő matematikából. A Természettudományi Ismeretterjesztő Társulat (TIT) győri tagozatában a Kis Matematikusok Baráti Körét vezeti 1970 és 1982 között.

1982-től 1998-ig nyugdíjasként óraadó volt Győrben, illetve a Pápai Református Kollégium Gimnáziumában. Itt a tanítás mellett egyetemi előkészítőt vezetett és tehetséggondozást végzett matematikából. Közben az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematika I. kategóriájában működő bizottság elnöke volt 10 évig. A Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának elnöke huzamosabb ideig. Győrben 1970-től 1994-ig érettségi elnökként működött.

Felesége szintén matematikatanár, leánykori neve Pataky Éva. Két gyermekük és hat unokájuk van.

2. Néhány tanítványa

Andrásfai Béla a Budapesti Műszaki Egyetem tanára.

Bogdán András I. díjas az Arany Dániel Matematikaversenyen, 1978. (Jelenleg a győri Révai Gimnázium matematikatanára.)

Frank József III. díjas az Arany Dániel Matematikaversenyen, 1975.

Kapos László I. díjas az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen, 1981. (Most a Grazi Egyetemen informatikát tanít.)

Kiss Ernő IV. díjas az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen, 1981.

Konkoly István szombathelyi megyéspüspök.

Ódor Tibor a Szegedi Tudományegyetem és a Tokiói Egyetem tanára.

Pálfalvi György II. díjas az Arany Dániel Matematikaversenyen, 1972.

Rimányi Richárd második dicséretet kapott általános iskolás korában az Arany Dániel Matematikaversenyen, 1983.; II. díjat az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen, 1986. (Szabó Rudolfné és Zsebők Ottó is matematikatanára), 1987-ben I. díjas ugyanezen a versenyen. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem és az Ohio Állami Egyetem tanára. (Az Ohio State University magyar szempontból nevezetes hely: itt tanított a híres Radó Tibor (1895–1965) matematikaprofesszor 1930-tól 1948-ig, miután távozott a Szegedi Tudományegyetemről, amelyet ekkor Ferenc József Tudományegyetemnek neveztek.)

Sain Ildikó matematikus, MTA Matematikai Kutatóintézete.

Thullner Emma II. díjas az Arany Dániel Matematikaversenyen, 1978. Győrben matematikatanár.

Varjú Dezső a biokibernetika professzora a Tübingeni Egyetemen.

3. Irodalmi munkásságáról

Néhány kitűzött feladata

1. *a)* Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor

$$\frac{7n-1}{4} \text{ és } \frac{5n+3}{12}$$

nem lehetnek egyszerre egész számok.

b) Hány olyan 1996-nál kisebb n természetes szám van, amelyre a

$$\frac{4n+3}{13n+2}$$

tört egyszerűsíthető. (A Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen Székelyudvarhelyen tűzték ki 1996-ban Weszely Tibor (Marosvásárhely) és Czapáry Endre a 9. osztályosok számára.)

2. Vegyünk fel a síkban négy egyenest, amelyek páronként metszik egymást, de három nem megy át egy ponton. Ekkor a négy egyenes négy háromszöget határoz meg. Igazoljuk, hogy a négy háromszög köré írt négy kör egy közös ponton megy át. (A Matematika Tanítása, III. kötet (1956), 6. szám, 189–190. oldal, itt két megoldást közölnek, az egyiket Kóváry Károly, a másikat Stéger Ferenc adta, összesen 37 megoldó volt.)

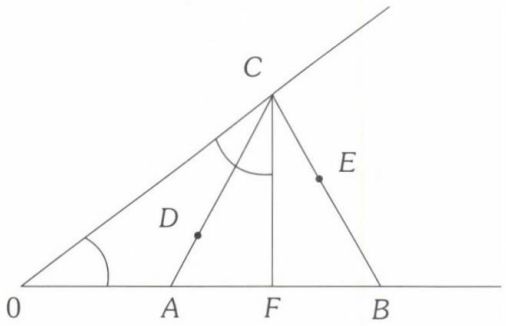
3. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe írt kör sugara nem nagyobb az oldalak négyzetösszegéből vont négyzetgyök hatodrészénél.(KöMaL, 1951. március, 287. oldal, 268. feladat)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely közönséges egész szám két másiknak négyzetösszegével egyenlő, akkor egyúttal minden pozitív egész kitevőjű hatványa is hasonló tulajdonságú. (KöMaL, 1951. március, 286. oldal, 259*. feladat)

Néhány feladatmegoldása

1. *Szerkesszünk egy olyan egyenlőszárú háromszöget, amelynek alapegyenese egy előre megadott szög egyik szára, csúcsa a szög másik szárára esik, szárai pedig két, a szög szárai között megadott ponton mennek át.* (Matematikai Lapok. IV. évfolyam (1953), 2-3. szám, 190. oldal, 20. példa)

Czapáry Endre megoldása:



Az ábrán D-vel és E-vel jelölt pontokat és a megjelölt szögeket ismerjük. Ezekből az ismert elemekből transzformációk segítségével újabb ismert elemeket állíthatunk elő. Olyan transzformációt keresünk, amelynek segítségével az ismert és az ismeretlen elemeket összefüggésbe hozhatjuk egymással. A legegyszerűbb ilyen transzformáció: tükrözzük a D pontot az OC egyenesre. Az így kapott D' pont ugyanis az ismeretlen C-ből ismert szög alatt látszik ($D'CE \sphericalangle = 2 \cdot OCF \sphericalangle$), tehát C megszerkeszthető.

2. *Mi azon körök középpontjának mértani helye, amelyek átmennek egy adott ponton és amelyekből egy adott egyenes adott hosszúságú húrt metsz ki?* (Matematikai Lapok, IV. évfolyam (1953), 4. szám 290-291. oldal)

Czapáry Endre megoldása:

Válasszuk az adott egyenest koordinátarendszerünk x tengelyéül, s az y tengelyt úgy helyezzük el, hogy átmenjen az adott P ponton. A húr hossza, melyet az x tengely a körökből kivág, legyen d. Jelöljük a körök középpontja alkotta görbe pontjait $O(x, y)$-nal.

Az $O(x, y)$ középpontú kör átmegy a

$$P(0, p), A\left(x-\frac{d}{2},0\right), B\left(x+\frac{d}{2},0\right)$$

pontokon. Ebből következik, hogy $OP = OA$, azaz

$$x^2 + (y-p)^2 = \frac{d^2}{4} + y^2.$$

Rendezve

$$x^2 = 2py + \frac{d^2}{4} - p^2 = 2p \cdot \left(y - \frac{4p^2 - d^2}{8p} \right).$$

Tehát a P-n átmenő, az x tengelyből d hosszúságú szakaszt kivágó körök középpontja egy olyan, az y tengelyre szimmetrikus parabolán van, melynek csúcsa

$$\frac{4p^2 - d^2}{8p},$$

fókusza pedig

$$\frac{8p^2 - d^2}{8p}$$

magasságban van.

Fordítva, ezen parabola minden pontja megfelel a feltételnek, mert a fenti számolás visszafelé is elvégezhető. Vagyis a kapott parabola a keresett mértani hely. (Az idézett helyen egy második megoldás is olvasható.)

3. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = 4{,}5$$

A Matematika v Skole folyóiratból (A Matematika Tanítása, I. kötet (1954), 5. szám, 153-154. oldal)

Czapáry Endre megoldása:

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 16-tal. Így kapjuk:

$$(8x + 7)^2(8x + 6)(8x + 8) = 72 .$$

Észrevehetjük, hogy a $8x + 6$ és a $8x + 8$ szimmetrikus elhelyezkedésű $8x + 7$-re. Válasszuk ezért új ismeretlennek: $8x + 7 = y$-t. Ekkor az egyenlet:

$$y^2(y + 1)(y - 1) = 72$$

vagy

$$y^4 - y^2 - 72 = 0.$$

Ez y^2-re másodfokú egyenlet, amelyből y^2 két értéke 9 és – 8. Így y négy értéke:

$$y_1 = 3, y_2 = -3, y_3 = 2\sqrt{2} \cdot i, y_4 = -2\sqrt{2} \cdot i.$$

És a megfelelő x értékek:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{5}{4},$$

$$x_3 = -\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}i, x_4 = -\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}i.$$

4. *Egy háromszög oldalai a, b, c, szögei α, β, γ. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:*

$$\left(1 - \frac{a}{c+b}\right)\left(1 - \frac{b}{a+c}\right)\left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \leq$$

$$\leq \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Kitűző: Dux Erik, Szolnok
(A Matematika Tanítása, IV. kötet (1956), 2. sz., 63. oldal)

Czapáry Endre megoldása:

Hozzunk a zárójeleken belül közös nevezőre, használjuk az $a + b + c = 2s$ jelölést, a jobb oldalon pedig alkalmazzuk a

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

helyettesítést. (Itt ugyebár $\frac{\alpha}{2}$ hegyesszög.)

Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség ilyen alakú lesz:

$$\frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc},$$

vagyis

$$abc \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2}.$$

Ez az egyenlőtlenség a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint helyes, tehát, mivel ekvivalens átalakítások révén nyertük, a bizonyítandó egyenlőtlenség is helyes. Egyenlőség csak akkor állhat, ha $a = b = c$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{2},$$

ha n természetes szám.

Kitűző: Hódi Endre, Budapest (A Matematika Tanítása, II. kötet (1955), 6. szám, 189-190. oldal)

Czapáry Endre megoldása:

Mint ismeretes, nemnegatív számok számtani közepe nem nagyobb a négyzetes középnél:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

amiből:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Ennek alapján:

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)^2 \le$$

$$\le n \cdot \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right].$$

A jobb oldalon nagyobbítunk, ha a nevezőket kisebbítjük, kifejezésünk tehát még inkább kisebb, mint

$$n \cdot \left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right],$$

ami így írható

$$n \cdot \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right] =$$

$$= n \cdot \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right] = \frac{1}{2}$$

Tehát:

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Könyvei

1. Feladatgyűjtemény matematikából a dolgozók gimnáziuma számára, I. osztály, Tankönyvkiadó, Budapest, 1963. (Társszerző: Varga Árpád)

2. Feladatgyűjtemény matematikából a dolgozók gimnáziuma számára, II. osztály, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. (Társszerző: Varga Árpád)

3. Feladatgyűjtemény matematikából a dolgozók gimnáziuma számára, III. osztály, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. (Társszerző: Varga Árpád)

4. Feladatgyűjtemény matematikából a dolgozók gimnáziuma számára, IV. osztály, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973. (Társszerző: Varga Árpád)

5. Geometriai feladatok gyűjteménye II., Tankönyvkiadó, 1971. (Társszerző: dr. Soós Paula)

6. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák III. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. (Társszerzők: Horvay Katalin és Pálmay Lóránd)

7. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák IV. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969. (Társszerzők: Gyapjas Ferenc, Horvay Katalin és Pálmay Lóránd)

8. Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák III. osztályában a matematika tanításához, Budapest, 1968. (Társszerzők: Horvay Katalin és Pálmay Lóránd)

9. Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák IV. osztályában a matematika tanításához, Budapest, 1968. (Társszerzők: Gyapjas Ferenc, Horvay Katalin és Pálmay Lóránd)

10. Matematika a középiskolák III. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

11. Matematika a középiskolák IV. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

12. Fejezetek a középiskolai matematika-tanítás módszertanából I. Szerkesztette Czapáry Endre, ELTE TTK Matematikai Módszertani Csoport Munkaközössége, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

13. Fejezetek a középiskolai matematika-tanítás módszertanából II. Szerkesztette Czapáry Endre, ELTE TTK Matematikai Módszertani Csoport Munkaközössége, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

14. Fejezetek a középiskolai matematika-tanítás módszertanából III. Szerkesztette Czapáry Endre, ELTE TTK Matematikai Módszertani Csoport Munkaközössége, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

15. Szemelvénygyűjtemény a matematika tanításához, Szerkesztette Czapáry Endre, ELTE TTK, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

16. Matematika a szakközépiskola I. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

17. Matematika a szakközépiskola II. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

18. Matematika a III. osztály számára, Szakközépiskolai tankönyvek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

19. Matematika a IV. osztály számára, Szakközépiskolai tankönyvek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

20. Tanári kézikönyv, Szakközépiskola, Matematika I-II. osztály, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

21. Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

22. Matematika I. Szakmunkások szakközépiskolája, Dolgozók középiskolája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

23. Matematika II. Szakmunkások szakközépiskolája, Dolgozók középiskolája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

24. Matematika III. Szakmunkások Szakközépiskolája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. (Társszerző: dr. Urbán János)

25. Matematika I-III. Vizsgakérdések és feladatsorok. Szakmunkások szakközépiskolája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

26. Matematika a középiskolák I. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

27. Matematika a középiskolák II. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

28. Matematika a középiskolák III. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

29. Matematika a középiskolák IV. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

30. Matematika a középiskolák 9. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001. (Társszerző: Gyapjas Ferenc)

31. Feladatgyűjtemény a középiskolák 9. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest; 2001. (Társszerző: Gyapjas Ferenc)

32. Matematika a középiskolák 10. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002. (Társszerző: Gyapjas Ferenc)

33. Feladatgyűjtemény a középiskolák 10. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002. (Társszerző: Gyapjas Ferenc)

(A könyvek általában több kiadásban jelentek meg, ezt nem tüntettük fel és az évszámok is csak azt jelentik, hogy abban az évben megjelent az illető könyvnek egy kiadása.)

5. Kitüntetései

Népköztársasági Érdemérem Ezüst fokozat, 1950.
Beke Manó-díj II., 1954.
Kiváló Tanár, 1973.
A szakközépiskolai matematika tankönyvírói pályázaton I. díjat nyert, a tankönyvek 1976-77, illetve 1977-78-ban készültek el a feladatlapokkal együtt. A tankönyvek íróját nívódíjjal jutalmazták.
Apáczai Csere János díj, 1981.
Pedagógiai Szolgálati Emlékérem, 1982.
Beke Manó-díj I., 1983.
Emlékérmet kapott a Magyar Köztársaság elnökétől, 2000.

Legnagyobb matematikatanári műve és érdeme az, hogy felkészülve és lelkesen tartotta matematikaóráit, másrészt kiváló tankönyveivel nagy szolgálatokat tett a magyar matematikatanításnak.
Jelenleg új matematikatankönyveken dolgozik.

Irodalom

[1] *Győr-Moson-Sopron megye kézikönyve*, Fekete M. – Ceba Kiadó, 1998. 891. oldal
[2] Magyarország helységnévtára 1933 (Szerkeszti és kiadja a Magyar Királyi Központi Statisztikai Hivatal), Budapest, 1933.
[3] Magyar ki kicsoda 1990, Láng Kiadó és Texoft Kft, é.n., 115.oldal
[4] Magyar tudóslexikon A-tól Zs-ig, Better-MTESZ-OMIKK, 1998. (utánnyomás), főszerkesztő: Nagy Ferenc, (Békésy Györgyről a 162-164. oldalon)
[5[Matematikai Lapok VI. évfolyam (1955) 4. sz., 348. oldal

Köszönettel vettem a következők szóbeli vagy írásbeli segítségét:
[1] Dr. Csorba Ferenc a győri Krúdy Gyula Középiskola matematikatanára, Győr-Moson-Sopron megyei volt matematika szakfelügyelő és szaktanácsadó, a Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának elnöke;
[2] Honti Dénes a győri Bercsényi Miklós Középiskola matematikatanára, Győr-Moson-Sopron megyei matematika szaktanácsadó;
[3] Horváth Péter matematikatanár, a győri Révai Miklós Gimnázium igazgatója; Tamás Imre matematikatanár, a győri Révai Miklós Gimnázium volt igazgatója.

Dienes Zoltán

Játsszunk néhány matematikai ideával I.

(A komplex számok játékos természete)

1. Bevezetés

A következő oldalakon megpróbálom rábírni az olvasót, hogy a matematikáról játékosan gondolkozzon. Az alapelvem az, hogy a matematikát próbálgatással lehet jól élvezni. Szerintem ezeket a próbálgatásokat konkrét tárgyakkal kell véghez vinni, amelyeket arra használunk, hogy velük elvont matematikai ideákat ábrázoljunk. Egy tárgy persze mindig egy tárgy marad, de nem kell elfelejteni, hogy a papírra leírt szimbólum mindig csak ceruzanyom vagy tintafolt marad. Az a fontos, hogy tudjuk, mit ábrázol a ceruzanyom vagy a tárgy. Egy tárgynak az alakját, színét, nagyságát és vastagságát könnyű felismerni; ezért a szabályokat könnyű megtanulni, hogy milyen módon kell tárgyainkat más tárgyakra kicserélni; természetesen ezek a szabályok matematikai műveleteknek felelnek majd meg, amiket a matematikusok titkos műhelyeikben nagy komolysággal végeznek.

Aki a matematikával játszani szeretne, annak meg kell mondani, hogy ő a mester, hogy neki akármit lehet a semmiből teremteni, mintha varázsló lenne. Igaz, hogy néha nagyon furcsa lényeket teremthet a varázsló, de az nem baj, így tanul meg a varázsló a matematikai műhelyben játszani!

1.1. Konkrét eszközök

Kezdjük el teremtő munkánkat színes tárgyakkal. Mondjuk, hogy ezek lehetnek kékek vagy pirosak. Mondjuk, hogy egyelőre tárgyainknak csak kétféle alakja lehet, például legyenek ezek vagy körök, vagy négyzet alakú tárgyak. A két szín helyett lehetne két nagyságot használni, a tárgyaink lehetnének vagy kicsik vagy nagyok. Lehetne egész más fajta „elemeket" is használni, például házakat, vagy fákat, vagy autókat (persze csak ezeknek a képeit!). Jó volna néha emberi alakokat is használni, például férfiakat és nőket, fiúkat és lányokat.

Minthogy választani kell, maradjunk meg egyelőre a színes alakoknál: tehát a játékszereink piros meg kék körök és négyzetek lesznek.

1.2. Ekvivalens rakások (halmazok)

Tegyük a tárgyainkat egy nagy zacskóba. Két játékos a következő játékot játszhatja:

Mindkét játékos csukott szemmel kihúz egy csomó tárgyat a zacskóból. Majd visszatesznek a zacskóba minden olyan párt, amelyikben egyik tárgy piros a másik meg kék, de mind a kettő ugyanolyan alakú. Ilyen párnak a neve: nullapár.

Amikor minden nullapárt visszatettek a játékosok a zacskóba, megszámolják, hogy mennyi tárgyuk maradt.

Ezt a műveletet annyiszor ismétlik, ameddig valamelyik játékos olyat húz ki a zacskóból, amiből mindent vissza tud oda rakni. Ez a játékos kijelenti, hogy „Nullám van!". Ezután összeadják, hogy hány darab nem került vissza a zacskóba, és az győz, akinek ez az összeg kevesebb.

Ha az egyik húzás után mind a két játékosnak mindegyik alakból ugyanannyi maradt meg (a színeknek is meg kell egyezni!), akkor a játék döntetlen. Ilyenkor újra kell kezdeni a játékot.

Ha két rakásban (amikor a nullapárok már visszakerültek a zacskóba) pont ugyanannyi és ugyanolyan színű tárgy van mind a két alakból, akkor ezeket a rakásokat ekvivalens rakásoknak hívjuk.

A következőkben egy rakást mindig ki lehet cserélni egy másik ekvivalens rakással. Az üres rakás, tehát az, amiben nincs semmi, minden olyan rakással ekvivalens amiben csakis nullapárok vannak. Ez azt jelenti, hogy az üres rakás helyett, mindig egy olyan rakást lehet elképzelni, amiben csak nullapárok vannak.

1.3. A rakások összeadása és kivonása

a) Összeadás.
Két rakást egyszerűen úgy kell összeadni, hogy összetéve őket a két rakás egy rakássá válik. Ezt az összetett rakást persze mindig ki lehet cserélni egy vele ekvivalens rakással.

b) Kivonás.
Ha ki akarunk vonni egy *R*-nek nevezett rakást, egy másik, például *S*-nek nevezett rakásból, akkor meg kell keresni *S*-ben egy *R*-rel ekvivalens rakást, amit az *S*-ből el kell venni. Ha ilyen ekvivalens rakás nincs az *S*-ben, akkor egyszerűen az *S*-hez hozzáteszünk egy csomó nullapárt, amíg egy *R*-rel ekvivalens rakás nem jelentkezik az *S*-ben. Ezután ezt az ekvivalens rakást elveszszük az *S*-ből.

c) A legkisebb rakás, ami ekvivalens egy csomó ekvivalens rakással. Ez az a rakás lesz, amiből már az összes nullapárt eltávolítottuk. Ez a legkisebb rakás lesz ennek az egész rakás-osztálynak a neve.

d) A semleges rakás-osztály.
Amikor egy rakásban mindegyik alakból éppen annyi kék van, mint piros, akkor azt egy semleges rakásnak hívjuk. A legkisebb semleges rakás az üres rakás, az, amiben nincs semmi.

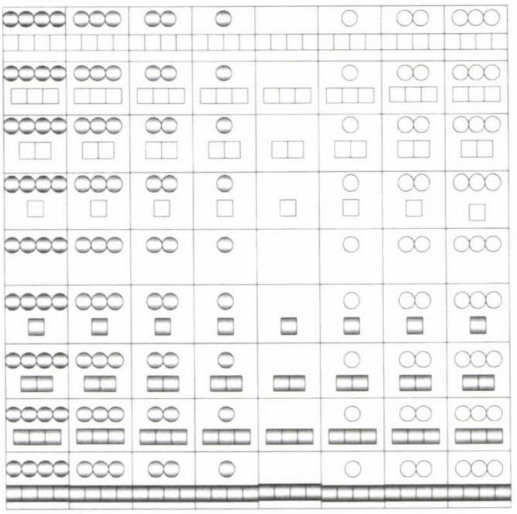
Egy semleges rakást akármilyen rakáshoz hozzá lehet adni, és olyan rakás lesz belőle, ami az előbbivel ekvivalens. A semleges rakások osztályát rendszerint a 0-val jelöljük vagy pedig így:

(0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0, 0) ...,

attól függően, hogy hány különböző alakkal dolgozunk. Az alakok száma amelyekkel dolgozunk a játékunknak a dimenzió-száma. Eddig csak kétdimenziós játékokkal foglalkoztunk.

2. Rakjuk rá a rakásokat egy táblára

Itt van egy tábla, amire a rakásainkat rá lehet tenni. A kis négyzeteknek elég nagyoknak kell lenni, hogy a rakásaink rajtuk elférjenek. A kéket fehérrel jelzem, a pirost pedig szürkével.



Ha egy lépéssel balról jobbra megyünk, akkor vagy egy kék körrel nagyobb vagy egy piros körrel kisebb rakáshoz jutunk el. Ha pedig jobbról balra teszünk egy lépést, akkor vagy eggyel több piros kört vagy eggyel kevesebb kék kört látunk a következő rakásban. Ha pedig fentről lefelé vagy fordítva lépünk, akkor vagy a kék négyzetek növekednek, vagy a piros négyzetek fogynak, de ez fordítva történik, ha lefelé megyünk a kék négyzetek száma csökken, a pirosaké nő.

2.1. Sétáljunk a táblán

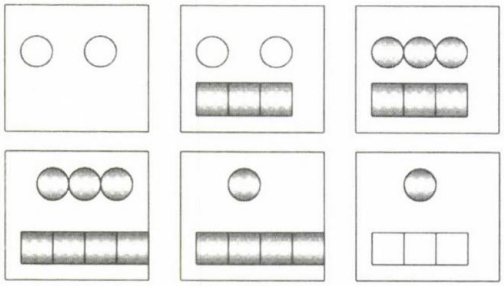
A tábla kellős közepén van az üres rakásnak a helye. Mondjuk, hogy éppen ott lakunk, tehát ott fogjuk a sétáinkat elkezdeni.

Az irányokat jegyezzük meg ilyen formán:
ha felfelé indulunk, akkor azt írjuk FEL,
ha lefelé lépünk, akkor LE,
ha jobbra megyünk, azt írjuk JOBB,
ha balra megyünk, az BAL.

Kezdjük a dolgot ezzel a sétával:

2 JOBB → 3 LE → 5 BAL → 1 LE →
→ 2 JOBB → 7 FEL;

akkor a házunktól kezdve ezeken a négyzeteken kell átmennünk (ezeken változtatunk irányt):



Persze az utolsó négyzethez úgyis el tudnánk jutni, ha az 1 BAL, 3 FEL sétát tesszük meg az üres négyzettől elindulva.

Mindegyik négyzetnek a táblánkban van egy neve, vagy címe. Mindegyik cím két részből áll:

(i) a köröknek a száma és a színe,
(ii) a négyzeteknek a száma és a színe.

Matematikusok az ilyen elrendezést koordináta-rendszernek hívják.

A következő játékot tessék megpróbálni, amivel a rendszert jól meg lehet tanulni:

Az egyik játékos egy üres táblának egy négyzetére mutat. A másik játékosnak meg kell mondania ennek a négyzetnek a címét. Más esetben az egyik játékos egy címet mond, és a másiknak meg kell mutatnia, az üres táblán, hogy hol fekszik a megfelelő négyzet, aminek éppen az a címe (neve).

2.2. Összeadás és kivonás a táblán

Kétféleképpen lehet egy összeadást a táblán véghezvinni:

(i) Választani kell két négyzetet egy üres táblán, ahova nincsenek berajzolva a megfelelő rakások. Aztán mindegyik így kiválasztott négyzetnek meg kell csinálni a neki megfelelő rakást. Ezek után a két rakást össze kell tenni, és ha lehet, az így keletkező nullapárokat el kell venni belőle. Amikor megvan ez az új rakás, meg kell találni a neki megfelelő négyzetet a táblában.

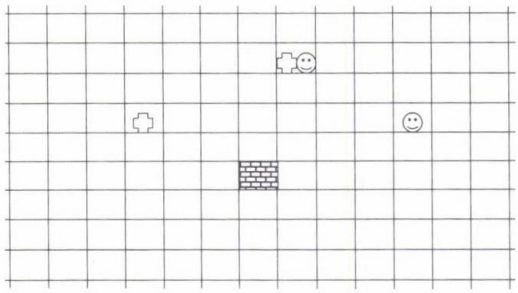
(ii) Az üres táblán megint választani kell két négyzetet (a második négyzet lehet pont ugyanaz mint az első). Meg kell találni a legrövidebb sétát a házunktól mindegyik négyzetig. Most menjünk el a házunktól az első kiválasztott négyzetig, és onnan menjünk tovább azokkal a lépésekkel, amelyekkel a házunktól a második négyzetünkig el tudtunk volna jutni. Az a négyzet, amit így elérünk a táblánkban, az lesz a mi két kiválasztott négyzetünknek az összege.

Mindegyik négyzetet a táblán el lehetne nevezni azzal a sétával, amit meg kell csinálni, hogy a házunktól addig a négyzetig elérjünk.

A második módja az összeadásnak tulajdonképpen azt jelenti, hogy a két összeadandó sétát egymás után megcsináljuk. Ezen a táblán két sétát ábrázolok:

(i) a háztól az arcig; (ii) a háztól a keresztig.

Az első séta: 4 JOBB, 2 FEL; a második séta: 3 BAL, 2 FEL.



Ha az arc-séta után megcsináljuk a kereszt-sétát, akkor odaérünk ahova berajzoltam mind a kettőt. Ha fordítva csináljuk a dolgot, akkor is odaérünk ahhoz a négyzethez, ahol arc és kereszt is van.

Érdekes, hogy az egyenes vonalak

Ház → Arc, Kereszt → Ház-Arc egymással párhuzamosak.

A Ház → Kereszt, Arc → Ház-Kereszt vonalak is párhuzamosak.

Tehát a négy csúcs: Ház, Arc, Kereszt, Ház-Kereszt egy paralelogrammát alkot. Ezért nevezzük ezt az összeadást néha

paralelogramma-összeadásnak.

Az arc + kereszt séta a paralelogramma egyik átlójával párhuzamos, viszont az arc-kereszt séta a paralelogramma másik átlójával párhuzamos.

2.3. Inverz rakások

Egy rakásnak az inverze egy olyan rakás, amelyiket, ha vele összetesszük, akkor egy semleges rakást kapunk.

Könnyű egy rakásnak az inverzét felépíteni: Minden tárgy helyett ami az első rakásban van, egy olyan tárgyat kell tenni a másik rakásba, aminek a színe más, de az alakja ugyanolyan. Ha két ilyen rakást összeteszünk, világos hogy az így keletkező rakásban csak nullapárok lesznek. A második rakás az elsőnek az inverze, az első rakás is a másodiknak az inverze.

Ha egy rakás inverzét a mínusz jellel jelöljük, akkor egész könnyű belátni, hogy a rakás $A - B$ (ami B-nek A-ból való kivonásából keletkezik) az $A + (-B)$ rakással ekvivalens. Tehát minthogy

$$A - B = A + (-B),$$

a jobb oldali kifejezés helyett lehet mindig a bal oldalit is használni.

3. Szorzás

Képzeljük el a szorzást mint egy helyettesítő műveletet. Például 6 gyereknek 12 lába van, mert mindegyiknek éppen kettő van. Tehát egy gyerek helyett két lábra gondolunk, és amikor a lábakat megszámoljuk, látjuk, hogy 12 van belőlük.

3.1 Teremtsünk ilyen helyettesítő szorzásokat!

Hogyan tudnánk általánosítani az „egy helyett több" ideát úgy, hogy a mi játékszereinkre vonatkozzanak?

Ne felejtsük el, hogy van egy szorzó, ami „ugyanannyival helyettesít", ez az egyes. Ha egy számot 1-gyel megszorzunk, ugyanazt a számot kapjuk eredményül. Ezért ezt „neutrális szorzónak" hívjuk. Normális számoknál csak egy ilyen „egyes" van. A mi játékunkban négy van: a kék kör, a kék négyzet, a piros kör, a piros négyzet. Ezekből melyik legyen az „igazi egyes" ami semmit se csinál? Igazán mindegy, hogy melyiket választjuk, én azt mondom tegyük fel, hogy a kék kör legyen az a szorzó, amelyik úgy hagy mindent ahogy van. Most aztán el kell határozni, hogy milyen lesz az eredmény, ha a többi három „egységgel" egy rakást megszorzunk!

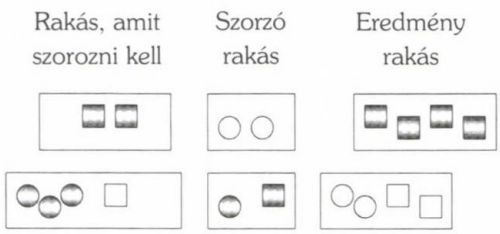
Nézzük meg a piros kört. Ez a tárgy az „igazi" egyestől csak színben különbözik. Ezért nem volna-e jó ezt a másik „egységet" egy színváltoztató egységgé avatni? Ha egy rakást egy piros körrel megszorzunk, akkor minden tárgy helyett egy ugyanolyan alakú, de más színű tárgyat kell az eredménybe tenni.

Most már könnyű lesz elhatározni, hogy a négyzetek hogyan szorozzák a rakásainkat.

A kék négyzet csak alakban különbözik az „igazi" egyestől, tehát úgy kellene határozni, hogy a kék négyzet egy alak kicserélő legyen. Világos akkor, hogy a piros négyzet az alakot és színt is kicseréli.

Akkor most nézzük meg, hogy mi legyen, abban az esetben, ha a szorzóban egynél több tárgy van.

Ha több tárgy van a szorzóban, az volna a természetes dolog, hogy minden tárgyat annyi tárggyal helyettesítsünk, amennyi tárgy van a szorzóban, de követni kell a fent megállapított szabályokat. Néhány példán bemutatom, hogyan működnek ezek a szabályok. Az eredményekben a nullapárokat már eltávolítottam.

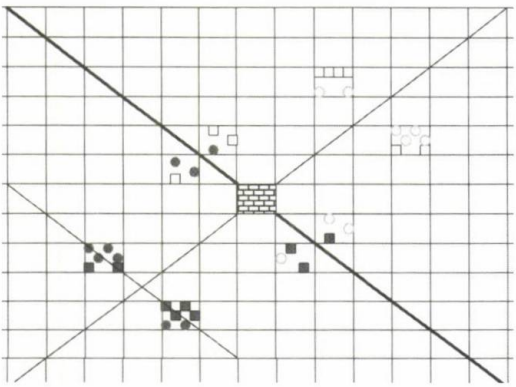


Itt egy érdekes szorzás:

Nem furcsa, hogy a szorzás eredménye „nulla", még akkor is, amikor mind a két „tényező" nem „nulla"?

Ha ez nem tetszik nekünk, akkor meg kell változtatni a szorzásra megállapított szabályokat. Ha pedig úgy gondoljuk, hogy ez nem baj, akkor csak menjünk tovább. Akkor egyszerűen meg kell engedni, hogy ennek a modern nullának nem-nulla tényezői is lehetnek!

3.2. Szorzás a táblán



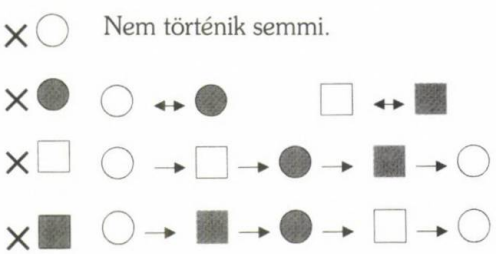
A fenti ábrában látható, hogy mi történik, amikor egy kék négyzettel szorzunk meg egy rakást. A szabályaink szerint ez a szorzás alakváltoztatást jelent. Az ábrán látni, hogy ez a művelet az ábrába berajzolt vékony vonalon át vezető tükrözést jelenti.

Azt is könnyű belátni, hogy a piros négyzettel való szorzás pedig a vastag vonalon át való tükrözést jelenti.

A piros körrel való szorzás pedig egy 180 fokos fordulatot jelent. Az „eredmény" a házunk ellenkező oldalára juttat, amikor a színeket megváltoztattuk, de az alakokat nem.

Hogyan is lehetett volna a szorzási szabályokat másképpen kitalálni?

Talán a tükrözések helyett csinálhattunk volna fordulatokat? Egy félfordulat már van, tehát miért ne cseréljük ki a két tükrözést két negyed fordulattal? Az egyik mehet úgy ahogy az óra fordul, a másik meg az ellenkező irányban. Tehát az új szabályok így hangozhatnak:



Ezeket a szabályokat így is meg lehet fogalmazni:

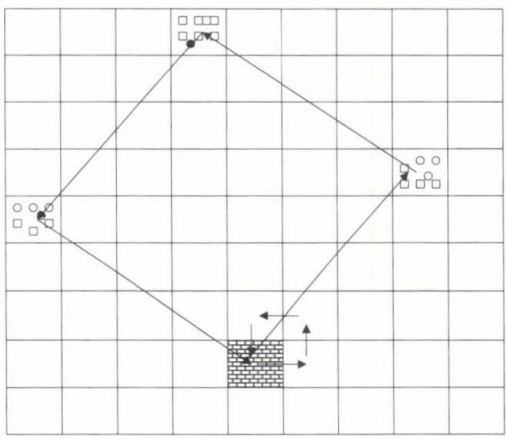
Kék kör	nem csinál semmit.
Piros kör	színváltoztató.
Kék négyzet	a körökből ugyanolyan színű négyzetek, de a négyzetekből más színű körök keletkeznek.
Piros négyzet	a körökből más színű négyzetek, de a négyzetekből ugyanolyan színű körök keletkeznek.

Az előbbi szabályok jók lesznek arra, hogy a polinomokat bevezessük. Ezt úgy fogjuk csinálni, hogy megint csak két színnel, de sokkal több alakkal fogunk játszani.

A megváltoztatott szabályok pedig úgynevezett komplex algebrába vezetnek be bennünket.

Nézzük meg, hogy mi történik, amikor több tárggyal megszorzunk egy rakást. Vajon mi lesz egy négyzetből, aminek a csúcsai:

(i) a házunk, (ii) 1 kék kör, (iii) 1 kék kör és 1 kék négyzet, (iv) 1 kék négyzet, ha mindegyiket megszorozzuk ezzel a rakással:



A fenti ábra megmutatja, hogy mi történik. A kis séta, amit a házunk környezetében csináltunk, egy nagyobb sétává válik. Mind a két sétában egy négyzetet sétálunk körül, de a második séta, ami a szorzásunknak az eredménye,

ötször olyan hosszú, mint az első. Az első sétában egy egységnyi területet járunk körül, a másodikban a körülsétált terület 25 egységgé válik. Ez mind azért van, mert egy derékszögű háromszögben, ha a derékszög melletti oldalaknak a hosszúsága 3 és 4 egység, akkor a derékszöggel szemben fekvő oldalnak a hosszúsága éppen 5 egység.

Ha fáradtak vagyunk, és csak kétszer annyi területet akarunk körüljárni, mint amennyit a kis sétánál csináltunk, akkor mindegyik csúcson álló rakást csak egy kék körrel meg egy kék négyzettel kellene megszorozni. Ha ezt véghezvisszük, akkor az így keletkező négyzetnek egy 45 fokos fordulatot is adunk.

Jól lehet játszani ilyen szorzásokkal. Próbáljuk előre megmondani, hogy bizonyos ábrából mi lesz, ha valamilyen rakással megszorozzuk a rakásokat, amelyek a csúcsokon állnak.

3.3 Egy pontosabb nyelv kifejlesztése játékaink leírására

Használjunk rendes számokat arra, hogy megmondjuk, hány kör van egy rakásban. Ha egy pozitív számot használunk, az azt jelenti, hogy kék körökről van szó. Ha egy negatív számot használunk, akkor piros körökről van szó.

A négyzetek számát i betűvel ellátott számokkal számoljuk meg. Egy pozitív i betűs szám kék négyzetekre fog vonatkozni, és természetesen egy negatív i betűs számnak piros négyzetekre kell vonatkoznia.

Például □□□ = 3 i, ■■ = – 2 i, és így tovább.

Ha egy rakásban körök is meg négyzetek is vannak, akkor a plusz jelet írjuk a rendes és az i betűs számok közé. Például

□□□●● = 3i + (– 2),

amit úgy is lehet írni, hogy 3 i – 2, ami azt jelenti, hogy 3 kék négyzetből ki kell vonni 2 kék kört. Ezt már tudjuk csinálni, mert a 3 kék négyzet helyett ezt írhatjuk:

□□□○●○● (odatettem 2 nullapárt),

és amikor a két kék kört eltávolítjuk (kivonás), akkor éppen marad 3 kék négyzet és 2 piros kör. Ezért kivonni egy rakást ugyanarra a rakásra vezet, mint ha hozzáadjuk annak az inverzét.

Körök és négyzetek helyett most így lehetne leírni a játékszereinket:

–3 + 3 i	–2 + 3 i	–1 + 3 i	3 i	1 + 3 i	2 + 3 i	3 + 3 i
–3 + 2 i	–2 + 2 i	–1 + 2 i	2 i	1 + 2 i	2 + 2 i	3 + 2 i
–3 + i	–2 + i	–1 + i	i	1 + i	2 + i	3 + i
–3	–2	–1	0	1	2	3
–3 – i	–2 – i	–1 – i	–i	1 – i	2 – i	3 – i
–3 – 2 i	–2 – 2 i	–1 – 2 i	–2 i	1 – 2 i	2 – 2 i	3 – 2 i
–3 – 3 i	–2 – 3 i	–1 – 3 i	–3 i	1 – 3 i	2 – 3 i	3 – 3 i

Az i betű az első betűje az „imaginary" angol szónak, vagy az „imaginaire" francia szónak, vagy az „imaginario" olasz szónak. Eleinte a matematikusok szégyellték magukat, hogy ilyen egyáltalán nem létező számokkal dolgozzanak, ezért ezeket a számokat képzeletbeli számoknak nevezték (imaginary numbers). Ma már csak az i betű maradt meg ezekből az elképzelt nehézségekből!

Most már a jól ismert számolási szabályokat lehet használni ezekkel a „képzeletbeli" számokkal, csak azt kell hozzátenni mint új szabályt, hogy

$$i \times i = i^2 = -1.$$

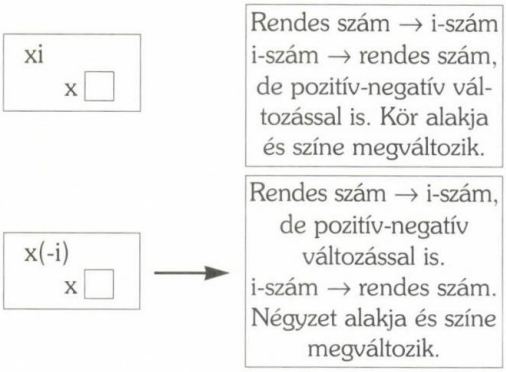
A „rendes" számokat (amelyek a körökre vonatkoznak) meg az i betűs számokat (amelyek a négyzetekre vonatkoznak) egymástól függetlenül kell összeadni meg kivonni.

Például (2 + 3i) + (– 1 + – 5i) = (1 – 2i).

Most tisztázzuk a szorzás szabályait, amikor az új szimbólumrendszert használjuk.

x1 x ○ → Nincs változás

x(-1) x ● → Pozitív ↔ Negatív, Szín megváltozik



Úgy látszik, hogy a mi új i-számunk a mínusz egynek a négyzetgyöke. Persze, most már van a mínusz egynek még egy másik négyzetgyöke, az a mínusz i. A szabályaink szerint

$$i \times i = i^2 = -1, \text{ de az is igaz, hogy}$$
$$(-i) \times (-i) = (-i)^2 = -1.$$

Ezek miatt most meg lehetne oldani olyan másodfokú egyenleteket, amelyeknek eddig nem voltak megoldásai. Itt van egy példa:

$$X^2 + 2X + 2 = 0,$$

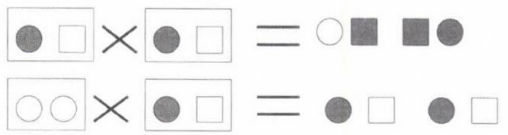
amit így is lehet írni:

$$(X + 1)^2 + 1 = 0, \text{ vagy } (X + 1)^2 = -1,$$

ami azt jelenti, hogy $X = -1 + i$ vagy $X = -1 - i$. Úgy látszik akkor, hogy a megoldások ezek:

Ez azt jelenti, hogy ennek a rakásnak semlegesnek kell lennie:

és még akkor is, ha a kék négyzetek helyett piros négyzeteket teszünk a fentiekbe. Ezt nem nehéz egy kis munkával igazolni.



És ha a két jobb oldali rakáshoz hozzáadunk még kért kört, akkor bizony az egész rakás csak nullapárokból fog állni. Tehát minden rendben van.

Az olvasóra hagyom azt a feladatot, hogy hasonlót kipróbáljon a kék négyzetek helyett piros négyzeteket használva.

Peller József

A törtek fogalmának kialakításáról

A matematikaoktatás feltételei a kisgyermek intenzív általános ismeretszerzése során alakulnak ki. (Tárgyfogalmak, tulajdonságfogalmak, tárgyi tevékenységként elvégzett műveletek, a jel értelmének felfogása.) A törtszámok gyökereit is itt érdemes keresnünk. *A matematikai ismeretszerzés első szintje a matematikai objektumok – közöttük a számok – kialakításával jellemezhető.* A számfogalom forrása a mennyiség, amelynek azonban két, minőségileg különböző fajtája van: a diszkrét(darabos), illetve a folytonos. Ezért a számok tanítása már a kezdet kezdetén két ágon indul. Ha az alsó tagozaton csak a természetes számok tanítása volna a feladat, akkor sem mellőzhetné a mennyiségek mérését. (Régen így is volt. A 6-10 éves tanulóknak hazánkban először az '50-es évek közepe táján lett tankönyvük, címe: Számolás és Mérés.)

A diszkrét és folytonos, a számlálás és mérés, az aritmetika és az algebra dualizmusa olyan problémakör, amelynek vizsgálatával az oktatás szempontjából neves matematikusok – többek között – Lebesgue és Kolmogorov is mélyrehatóan foglalkoztak. ([1] 110-132. old.)

A tanulók is szembesülnek a diszkrét és folytonos mennyiség jelenségeivel. Idővel ezekről alkotott képzeteik alapján, intuicióval (megérzéssel) a kétfajta mennyiséget meg is különböztetik. Mit értünk tulajdonképpen diszkrét, illetve folytonos mennyiségen? Fogalmazzuk meg jellemzőiket.

Diszkrét mennyiség. Adott fogalomnak megfelelő egyedek halmaza. Minden egyes szerves egészet alkot, megbontani, részekre osztani nem lehet. Ha megbontanánk, akkor elveszítené mi-

voltát, megsemmisülne. Természetes módon adott egysége van. Bármelyik egyed jelentheti az egységet.

Folytonos mennyiség. Bármelyik darabja részekre osztható. Nincs legkisebb része. Nincs természetes módon adott egysége. Az egységet választani kell, amely az adott mennyiség jól meghatározott darabja. Az egység csak logikailag alkot egészet, részekre osztható.

A diszkrét mennyiség a természetes szám fogalmának a forrása. A törtek azonban nem származtathatóak le a természetes számok ismeretében, mert mit jelentene a gyerek számára

$$\frac{2}{3} \text{ vagy } \frac{17}{8}?$$

No, persze mindenki tudja, hogy *a törtek fogalma már a folytonos mennyiségekből ered*, ezeknek a jeleknek az értelmét jól meg kell alapozni. Ebből következik, ami nagyon fontos, hogy a törtek fogalmát nem azonosíthatjuk jelölésükkel. (Általában a jelzett fogalmat a jellel.) Hiszen a törteket másként is jelölhetnénk, például egyetlen jellel, aminek az volna a haszna, hogy a tört a tanuló számára – amint kellene is – egy számot jelentene.

Az olvasó szíves figyelmébe ajánlom Filep László [2] cikkét, amelyben a törtszámok kialakulásának a történetével is foglalkozik. Ennek számos tanulságát a témakör tanításánál – többek között – a fogalom és a jel viszonyának kérdésében is hasznosíthatnánk.

Miért célszerű mégis a mai jelölésmód? *Megkönnyíti a törtek és a természetes számok egy struktúrába való szerveződését.*

Így is van lehetőségünk arra, hogy a tanulóknak a törtről szerves fogalmuk alakuljon ki. Tartózkodnunk kell a számláló és a nevező korai megnevezésétől. Jóval későbbre kellene halasztani, mint az ma az oktatási gyakorlatban szokásos. A számláló és nevező korai bevezetésének az a következménye, hogy a tanuló a törtet két természetes szám fura együttesének fogja fel, már csak azzal törődik, hogy mit kell tennie külön a számlálóval és külön a nevezővel. *A tört két számra hullik szét.* Engedjen meg az olvasó egy személyes megjegyzést. Amikor az analízis tárgyak oktatásától megváltam és a szakmódszertan előadójaként, gyakorlatvezetőjeként a tanárjelöltek elé álltam, rádöbbentem, hogy a törtek témakörében több dolgot mélységében nem értek. Gyötrődésemet kollégáim heccelődéssel jutalmazták, a hallgatók elnéző mosollyal fogadták. Évek múlva Skemp következő sorai nyugtattak meg:

„Néhány ember valóban egész életében képtelen eljutni a törtszámok igazi megértéséhez – és tulajdonképpen nem is nagyon hibáztathatjuk őket ezért. Valószínűleg a tanáraik sem értették meg a törtszámokat soha, márpedig ennek a speciális akkomodációnak a nehézségei oly nagyok, hogy a zseni szintjén levő gyermekre lenne szükség ahhoz, hogy ezt a feladatot abban az életkorban, amikor felmerül, segítség nélkül meg tudja oldani." ([5] 58. old.)

Amikor 1975-ben ezt olvastam, akkor már a „néhány ember" közül kikerültem, de azóta is többször végigjártam az utat, és találtam módosítani valót.

Az említett időben *az általános iskolában a modern oktatási reformmozgalom hatására a matematikaoktatás minőségi átalakítása már folyamatban volt.* Korábban az alsó tagozaton csak a bennfoglaló osztást tanították, ezért a mennyiségre vonatkozó tapasztalatok matematizálása meg sem kezdődhetett.

Az utóbbi negyed század alatt jelentős fejlődésnek vagyunk tanúi. A tanulók mennyiségi viszonyokban való tájékozódására a tankönyvek nagy gondot fordítanak, jó és változatos módszereket alkalmaznak. Ebben a vonatkozásban a tankönyvírók licitje sok értéket hozott. (Sajnos a tanyagcsuszamlást is kiváltotta.) *Ezután meglepő, hogy a mennyiségi tapasztalatok matematizálása mégis görcsösen történik.* (Az alsó és felső tagozaton egyaránt.) Mindegyik tankönyv **a bennfoglaló és a részekre való osztást** veszi, értelmüket megvilágítja. Előbb vagy utóbb eljutnak oda, hogy a természetes számok körében a kétféle osztás ugyanarra az eredményre vezet. Ami persze igaz, sőt a pillanatnyi célok szempontjából jól is hasznosítható. De a részképzés műveletét a folytonos mennyiségekre nem viszik át, az elenyészik. (Több tankönyv a kétféle osztást összeolvasztja, sőt olyan is van, amelyik a jelben való megkülönböztetést is feleslegesnek tartja.)

Így szakadék tátong a mennyiségi viszonyokat kifejező fogalmak (egész, fél, háromnegyed...) és a törtszámok között. Pedig a kettő között a **részképzés művelete képezi a hidat.** Marad a régóta ismert módszer: a két fogalomrendszer azonosítása. A tanulók zöme jó képzetekkel ugyan, de a túlsó parton marad, a zsenik maguknak idővel felépítik a hidat. Úgy vélem, hogy indokolt a folytonos mennyiségek megismerésétől kezdve a tört fogalmához vezető utat – fokozatokra bontva – bejárni. Ez az út az 1. osztályban kezdődik, a vége az alsó és felső tagozat közös tartományában van. Kezdjünk hozzá.

1. A tanulók már az első osztályban foglalkoznak *a folytonos mennyiség egyes fajtáival.* (Távolság, űrtartalom, tömeg.) Ezek köre később bővül. (Idő, hőmérséklet, terület, térfogat.)

2. A diszkrét és folytonos mennyiségek körében a párbaállítás, illetve az összemérés együtt történik. A **rendezési relációt** a diszkrét mennyiség esetében a kevesebb-több szavak fejezik ki. A folytonos mennyiség jóval gazdagabb: rövidebb-hosszabb, alacsonyabb-magasabb, keskenyebb-szélesebb, könnyebb-nehezebb, sóványabb-kövérebb, fiatalabb-öregebb, hidegebb-melegebb.

3. Az összehasonlításból alakul ki a mennyiségek mérése. Ugyanolyan mennyiségfajta két darabjáról van szó. A kisebbiket rámérik a nagyobbra, annyiszor, ahányszor lehet. *A kisebbik a választott (aktuális) egység szerepét tölti be, a másik a mérendőt.* Tárgyi tevékenységgel állapítják meg, hogy a mérendőben az aktuális egység hányszor foglaltatik benne. Az eredmény mérőszám.

4. A tanulók megismerik a távolság (űrtartalom) alapegységét, a métert (litert). A tömeg esetében nem lenne értelme az **alapegységet,** a grammot bevezetni, helyébe a kilogramm kerül.

Ezután megkezdődik a számtartomány terjedelmével szinkronban az alapegységek – tízes rendszernek megfelelő – többszöröseiből és részeiből álló mértékegységrendszerek kialakítása.

Az első lépés: 1 liter = 10 dl; 1 méter = 10 dm.

A métert, mint a távolság egy pontosan meghatározott darabját, tíz egyenlő részre osztják. *Ekkor még a méter és a deciméter viszonyát csak az egyik irányból nézik, fel sem vetődik, hogy a deciméter a méter tizede.*

5. A természetes számok tanításában a pénz mint modell nagyon hasznos. (Műveletek, számrendszerek szerkezete.) A *tízes számrendszer* megvilágítására az űrtartalom különösen alkalmas.

$$7 \text{ dl} + 2 \text{ dl} = 9 \text{ dl}; \quad 7 \text{ dl} + 3 \text{ dl} = 1 \text{ liter};$$
$$7 \text{ dl} + 5 \text{ dl} = 1 \text{ l} + 2 \text{ dl}.$$

A beöntött víz az egyliteres edénybe fér, éppen tele van, kicsordul.

6. A folytonos mennyiségek körében végzett *felváltások, beváltások, műveletek a törtek tanítását jól előkészítik.*

$$3800 \text{ cm} = 380 \text{ dm} = 38 \text{ m},$$
$$5 \text{ kg} + 58 \text{ dkg} + 2 \text{ kg} + 63 \text{ dkg} + 400 \text{ g} =$$
$$= 7 \text{ kg} + 121 \text{ dkg} + 40 \text{ dkg} = 8 \text{ kg} + 61 \text{ dkg}$$
$$6 \text{ km} - (2 \text{ km} + 80 \text{ m}) = 6 \text{ km} - 2080 \text{ m} =$$
$$= 3 \text{ km} + 920 \text{ m}.$$

De előkészítik az algebrában fontos *egynemű, különnemű tagok fogalmát* is. (A felső tagozaton ez folytatható, Vietè (1540–1603) felfogásában a négyzetes, köbös algebrával.) **A mennyiségek algebrája képezi az alapját a számváltozós (polinomok) algebrájának.**

7. A természetes szám fogalmának kialakításában fontos szerepe van a tárgyak leképezésének (ujjakra, korongokra, pálcikákra, dominóra, számlépcsőre). Ezek közül különösen jó a négyzetekből álló „függőleges" helyzetű téglalap. A képen látható tárgyak mindegyikének egy-egy négyzetbe rajzolt pöttyöt feleltetnek meg a tanulók. Ezután meglepő, hogy a tankönyvekben minden utalás nélkül csak úgy megjelenik a „vízszintes" helyzetű számegyenes. Miért éppen egyenesen szemléltetjük a számokat? Miért éppen **a távolság vált a folytonos mennyiségek modelljévé?**

Gondoljunk a gyakorlatban használt különböző mennyiségek mérésére. A mérőeszközök a mennyiséget skálán mutatják. (Mérleg, hőmérő, óra, barométer stb.) A mérőhenger a folyadék térfogatát távolságra képezi le. A $t = a^2$ összefüggés grafikonjáról leolvasható, hogy ha $a = 3$, akkor $t = 9$, amely az ábrán egy szakasz mérőszáma. Hogyan lett a területből szakasz?

8. A gyerekeknek már az iskolába lépéskor általában elég világos fogalmuk van a félről, sőt a negyedről is. Ezek a mennyiségekkel végzett tárgyi tevékenységek – felezés, negyedelés – so-

rán alakulnak ki. Figyeljünk fel arra, hogy ezek **számtól független, mennyiségi viszonyokat kifejező fogalmak.** Hiszen nemcsak az 1 méteres szalag felezhető, hanem a 8 méteres is, sőt a szalag akkor is felezhető, ha annak mérőszámát nem ismerjük. Mit jelent az egész? A gyerek számára természetes, hogy **az egész** – például felezéskor – **a felezendő mennyiség.** Így az egész nem számot, hanem esetenként adott mennyiséget jelent. (Nem az 1 számot!)

A tanulók ismeretszerzése ebbe az irányba is megindul, amelyet gondozni, fejleszteni kell. A fokozatosság elvét szigorúan be kell tartanunk, a tanulókat nem szabad siettetnünk. (Egész-fél, egész-negyed, egész-félnegyed, egész-harmad, egész-hatod, egész-harmadhatod közvetlen megértése nagyon fontos.) A megnevezett láncolatok még bővíthetők, de inkább mélyítésre érdemes törekedni. (A harmad fele az egésznek hányada?) A feltett kérdésekre a tanulók tevékenységgel, szavakkal válaszolnak. Hasznosabb, ha szűkebb körben ugyan, *a tárgyi tevékenység elképzelt folytatására biztos bázist alakítunk ki.*

9. *A következő fokozatban az egész már valamely fajta mennyiség mértékegységének többszöröse.* A világos megkülönböztetés érdekében egy példával utalunk az előzőre. A tanulók egy papírlapot kapnak kézbe. Félbe hajtani könnyen tudják, de irányítással a harmadoló hajtást is elvégzik. Az egész most a papírlap, amelynek felét, harmadát, negyedét, harmadát, nyolcadát, tizenkettedét, sőt... tudják képezni, és ezek viszonyában közvetlenül tájékozódni.

Az egész részeire vonatkozó fogalmak kiterjesztésére és alkalmazására különösen alkalmas az idő. (1 év = 12 hónap, a hónapok között van 28 napos, 1 hét = 7 nap, 1 nap = 24 óra, 1 óra = 60 perc.)

Ekkor még így kérdezzünk, és írjuk is: mennyi az óra negyede, háromnegyede? Később már a háromnegyede helyett 3 negyede lesz. Eddig a tankönyvek szerinti feldolgozásokban minden rendjén van. Ezután már nagy szóródást mutatnak.

10. A kétféle mennyiség tudatos megkülönböztetésére is sor kerül, amikor a 3. osztályban a **darabszám, mérőszám** kifejezéseket használják. (Az 5. osztályban a következő módon jártam el. Nagy műanyag poharakba néhány tollat, diót, illetve babot, lisztet, vizet, egy darab zsineget „rejtettem". Mi van a poharakban? Mennyi?)

11. Mennyiségek körében a többszörösképzésnek (természetes számmal való szorzásnak) **két inverze van.** Ezek a tárgyi tevékenység szintjén, és eredményük szerint is jól megkülönböztethetőek. Vegyünk néhány tanulói szintű feladatot.

a) A tálcán 15 nagy szilva van. Mellette az asztalon oszlopba rakva 6 tálka. Néhány gyerek mindegyikének 3 szilvát adunk. Hogyan végzi el a napos az osztást?

Az oszlopból levesz egy tálkát és beletesz 3 szilvát. Ezután levesz egy tálkát és beletesz 3 szilvát...

Az eredményt így rögzíthetjük: 15 sz : 3 sz = 5. Ellenőrzése: 5 × 3 sz = 15 sz. A napos azt nézte meg, hogy a 15 szilvában a 3 szilva hányszor van meg, hányszor foglaltatik benne. **Ezt a műveletet bennfoglaló osztásnak nevezzük.**

Ha a tálcán csak 14 szilva lett volna, akkor 14 sz : 3 sz = 4.
2 sz

Ellenőrzése: 4 × 3 sz + 2 sz = 14 sz. Ekkor **maradékos osztásról** beszélünk.

b) A 3 méteres zsinegből vágjunk le 75 cm-es darabokat! Képzeljük el a megfelelő tevékenységet. Olyan, mintha mérést végeztünk volna, csak most az egység nem 1 m, hanem 75 cm.

300 cm : 75 cm = 4.

Ellenőrzés: 4 × 75 cm = 300 cm.

c) 12 liter tejet 3 literes kannákba töltenek. Hány kanna telik meg?

12 l : 3 l = 4, mert 4 × 3 l = 12 l
1 kanna = 3 l; 4 kanna = 12 l

Ennek a mennyiségnek a literekben mért mérőszáma 12, kannákban mért mérőszáma 4.

A bennfoglaló osztás tulajdonképpen mérés. Azt nézzük meg, hogy a mérendő mennyiségben az aktuális egység (a kanna űrtartalma) hányszor foglaltatik. **Az eredmény szám, mérőszám.**

Ebből a műveletből származik **az oszthatóság fogalma.** Később a bennfoglaló osztás a tananyagban mint **arány** jelenik meg.

A maradékos osztás pedig az **euklideszi algoritmus** csírája.

12. Térjünk át a többszörös-képzés másik inverzére. Legyen az asztalon ugyanaz, mint korábban. A napos most azt a feladatot kapja, hogy a tálcán levő szilvát három egyenlő részre ossza. Másként kezdi. Az oszlopból levesz 3 tálkát és szétrakja az asztalon.

Ezután minden tálkába rak egy-egy szilvát. Maradt még szilva. Az előbbi eljárást megismétli. Maradt még szilva... folytatja míg a tálca üres lesz. Minden tálkában 5 szilva van. Tehát a 15 szilva harmada 5 szilva. Szavakban. Mennyi 18 toll harmada? Mennyi 21 könyv hetede? Menynyi 17 szék ötöde?

Hoppá! 17 széknek nincs ötöde, nem lehet 5 egyenlő részre osztani. (Nem tüzelni akarunk.) Mennyi 11 televíziókészülék harmada? (Ennek sincs megoldása.) Két készüléket törjünk össze? (De akkor megsemmisül, használhatatlan lesz.)

A darabos mennyiségeket nem mindig lehet egyenlő részekre osztani. (Bennfoglaló osztásnál lehet maradék, részképzésnél nem.)

Mi a helyzet folytonos mennyiség esetén? Vegyünk egy darab zsineget. Osszuk el négy egyenlő részre. Képzeljük el a tanuló tevékenységét! A zsinórt ismételt felezéssel négy rétre hajtja. Négy egyenlő darabra vágja. Nincs maradék.

13. Valamely mennyiség egyenlő részekre való osztását nevezzük röviden **részképzésnek.**

A többszörös-képzésre, a bennfoglaló osztásra már van jelünk. Itt az ideje, hogy a részképzés jelét is bevezessük. Ezt a jelentős lépést célszerű az alábbi feladatcsoporttal előkészíteni. (Az első sort közösen, a többit a tanulók önállóan végzik el.)

2 m háromszorosa 6 m;	6 m harmada 2 m
5 m háromszorosa 15 m;	15 m harmada □ m
7 m háromszorosa □ m;	□ m harmada □ m
□ m háromszorosa 18 m;	□ m harmada □ m
□ m háromszorosa □ m;	12 m harmada □ m
□ m háromszorosa □ m;	□ m harmada 3 m

A bal oldali oszlop megoldásait már régóta tudjuk jelöléssel kifejezni. Például $3 \times 5\text{ m} = 15\text{ m}$.

A részképzésre is jelölést használunk. Így jelöljük:

$$\frac{15\text{ m}}{3} = 5\text{ m}.$$

Ez a —— jel **a részképzés jele. Nem törtvonal!** Egyelőre törtekről szó sincs. Azoktól még távol vagyunk.

A részképzés mindkét mennyiségre – diszkrétre és folytonosra – egyaránt vonatkozik. Persze a kétféle osztás közötti eltérés számok körében már nem derül ki. Ezért fontos, hogy szöveges feladatok esetében is a műveleteket mennyiségek körében végezzük. A fizika oktatóinak a hálájára számíthatnánk.

Jegyezzük meg, hogy **a részképzés eredménye mennyiség.** (A bennfoglaló osztás eredménye mennyiségek körében is szám.)

14. A részképzés jelének bevezetése után a korábban szavakban vagy írásban, de hosszadalmasan leírt feladatokat tömörebben tudjuk kifejezni.

a) Egy sereg olyan feladatot oldatunk meg, amelyben *az adott mennyiség és a részképzés eredménye is ugyanazzal a mértékegységgel fejezhető ki.* Például:

$$\frac{36\text{ hl}}{9} = 4\text{ hl}; \quad \frac{18\text{ toll}}{6} = 3\text{ toll}.$$

b) Az előző feltételt megtartva a részképzés után többszörös-képzést is végzünk. Például: mennyi 16 perc három negyede? (negyedének háromszorosa) Első lépés:

$$\frac{16\text{ perc}}{4} = 4\text{ perc}.$$

Második lépés: három negyede 3×4 perc $=$ $= 12$ perc. Később így írjuk:

$$3 \cdot \frac{16\text{ perc}}{4} = 3 \times 4\text{ perc} = 12\text{ perc}.$$

c) Mennyi 14 könyv ötöde?

$$\frac{14\text{ könyv}}{5} = \text{nincs megoldása}.$$

Mennyi 14 m ötöde? Közvetlenül nem végezhető el, *de a mértékegység felváltásával* igen:

$$\frac{14\text{ m}}{5} = \frac{140\text{ dm}}{5} = 28\text{ dm}$$

A kisebb egységre való átváltás lehetősége egy idő múlva megszakad. Nem azért, mert nem lehetne az ismert mértékegységeknél még kisebbeket is bevezetni, hanem azért, mert **a folytonos mennyiségnek nincs „legkisebb darabja".** A természetes számok mint mérőszámok készlete szűknek bizonyul, *új szá-*

mokat kell kialakítani. Adott mennyiség esetében az **egységet rögzíteni kell.**

d) Mennyi 3 méter hetede? A tanulók számára világos, hogy ekkora távolság van, bár a mértékegységrendszer szerint nem tudják meghatározni. Becslést azonban adhatunk rá:

$$\frac{3\text{ m}}{7}=\frac{30\text{ dm}}{7}=\frac{300\text{ cm}}{7};$$

$$4\text{ dm}<\frac{3\text{ m}}{7}<5\text{ dm};\ 42\text{ cm}<\frac{3\text{ m}}{7}<43\text{ cm}$$

15. *A tört fogalma éppúgy absztrakció eredménye, mint a természetes szám fogalma.* Három táska meg 2 táska az 5 táska. Röviden: $3t + 2t = 5t$. Idővel a gyerek rájön, hogy egyre megy, hogy táskákat, tollakat, tevéket, tulipánokat ad-e össze. A mennyiség konkrét fajtájától függetlenül $2 + 3 = 5$. (Azt is tudja, hogy a tevékhez nem adhat tulipánokat.)

A törtek fogalmának megalkotásához most már érett a helyzet.

a) **A tört egyik értelmezéséhez** szükséges tapasztalattal már rendelkezünk. Tehát azzal, amikor **az egész mennyiség az alapegység többszöröse.**

Például:

$$\frac{6\text{ m}}{2}=3\text{ m};\ \frac{6\text{ kg}}{2}=3\text{ kg};\ \frac{6\text{ óra}}{2}=3\text{ óra}\ldots$$

A mennyiségi viszonyok számok viszonyává válnak:

$$\frac{6}{2}=3.$$

A fogalom alkotásának a pszichikai vonatkozására is érdemes felfigyelni. Jobb oldalon a 3, jól ismert szám áll. A vele egyenlő

$$\frac{6}{2}$$

is számmá válik.

b) **A tört értelmezésének másik módja: az alapegység részének mérőszáma – az ún. törzstört – többszöröse.** (A törzstört elnevezés Péter Rózsától származik [4] 115. old. Ennek a kiváló műnek az oktatásban való hasznosítására – a fellengzős dicséreteken túl – szerény ügybuzgalmat tapasztalok.)

Nyilvánvaló, hogy **a tört fogalmát a kétféle értelmezés összekapcsolásával érdemes a tanulók elé tárni.**

Az előkészítés módját egy példán mutatom be.

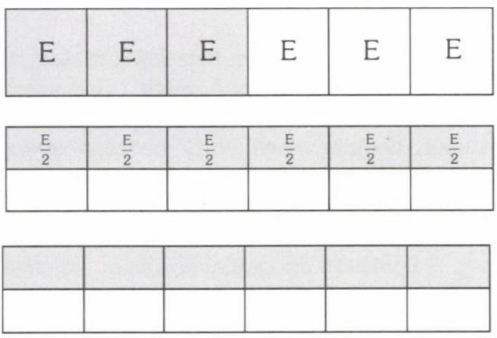
$$\frac{\text{m}}{2}=5\text{ dm};\ 6\cdot\frac{\text{m}}{2}\neq 6\cdot 5\text{ dm}=30\text{ dm}=3\text{ m}$$

Az előző és a mostani összekapcsolásával:

$$\frac{6\text{ m}}{2}=3\text{ m}=6\cdot\frac{\text{m}}{2}$$

A kétféle értelmezés jól szemléltethető a következő modellen. Hat egybevágó négyzetet egymás mellé illesztünk. A négyzet területét jelöljük E-vel. A téglalap területét a rövidebb, majd a hosszabb oldalak illesztésével félbe hajtjuk, felezzük.

Csak egy összevont ábra



Harmadik lehetőség: nincs ábra

Ezt kapjuk:

$$\frac{6\text{ E}}{2}=3\text{ E}=6\cdot\frac{\text{E}}{2}$$

Ha a mennyiségek konkrét fajtájától eltekintünk, akkor eredményünk a számok viszonyává valakul:

$$\frac{6}{2}=3=6\cdot\frac{1}{2}$$

Itt az $\frac{1}{2}$ teljesen új szám! Jelentése: az alapegység felének mérőszáma az alapegységre vonatkozóan. Tehát a fél $\neq\frac{1}{2}$! Több oknál fogva sem azonosíthatók.

A mennyiségi viszonyokat kifejező fogalmakra (egész, fél, negyed) továbbra is szükségünk van.

$$5\text{ dm}=\frac{\text{m}}{2}=\frac{1}{2}\text{ m}$$

Állapítsuk meg, hogy a részképzés jele beépül a törtek jelébe.

Hogyan tovább? Nagyon gyakori hiba, hogy a törteket egyszerre a tanulókra zúdítjuk, a törtek rengetegében a tanulók elvesztik tájékozódásukat. **Az újszülöttet, az első törzstörtet számmá kell avatnunk.** Ennek módját a [3] 59-69. oldalán találja meg az olvasó. A törzstörtek körét eleinte óránként eggyel bővítsük.

Remélem, hogy az oktatás érdekében erről a témakörről eszmecserét sikerül kiváltanom.

Irodalom

[1] D. B. Elkonyin – V. V. Davidov: Életkor és ismeretszerzés. Tankönyvkiadó, 1972.
[2] Filep László: A valós szám fogalmának kialakulása. Polygon, X. kötet 1. szám 2000. 13-34. old.
[3] Peller József: A számfogalom fejlesztésének szintjei az oktatási gyakorlatban. Tankönyvkiadó, 1974.
[4] Péter Rózsa: Játék a végtelennel. Bibliotheca, 1957.
[5] Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat, 1975.

Dr. Kántor Sándorné

Megjegyzés a KöMal Füzetek 1.-hez

Pataki János Tálalási javaslatok matematika felvételire KöMal Füzetek 1. könyvecskéjét örömmel vettem kézbe. Valóban itt az ideje, hogy az emelt szintű érettségi bevezetése előtt diagnosztizáljuk az eddigi matematika érettségi-felvételi írásbelik tapasztalatait, hiányosságait és a tanulók oldaláról közelítsük meg. A választott tipográfiai eljárás pl. amerikai tankönyvben, munkafüzetben szokásos.

A felvételi dolgozatok javítása és pontozása a hivatalosan kiadott Javítási Útmutató alapján történik. Évtizedek óta foglalkozom felvételi előkészítéssel, írtam Felvételi feladatok tematikus feldolgozásban címmel könyvet, részt vettem a felvételi dolgozatok javításában, illetve az országos felülvizsgálatban. Egy problémát nem emelt ki a könyvecske, ti. azt, hogy a tanulók megoldása sok esetben eltér a hivatalostól a „gyerek megoldás" nem egyezik meg a „felnőtt megoldás"-sal. Ez a probléma a tanulmányi versenyekre is vonatkozik.

Egy felvételi feladat lényegesen egyszerűbb megoldását szeretném bemutatni, mégpedig a 2002. máj. 22. de. 2B sorozat 4. feladatáét. Ez annál is indokoltabb, mert az Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika II. kötetének 2368. feladatával azonos.

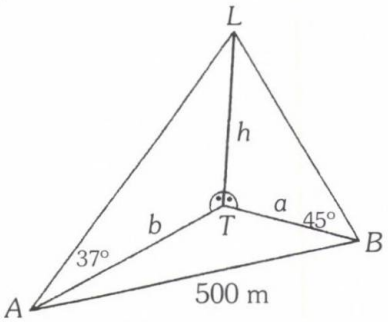
A Javítási Útmutatóban szereplő megoldással kb. 500 dolgozat javításánál, ilyen formában nem találkoztam, legfeljebb a zsebszámológéppel kiszámolt egyszerűsített megoldással. A Pataki János által leírt megoldást is láttam a felvételi dolgozatokban, de ott is hamarabb kezdtek hozzá a tanulók a numerikus számoláshoz.

A 2002. évi matematika felvételi-érettségi írásbeli 2B 4. feladata

Vízszintes terep T pontja fölött lebeg egy léggömb L. Ez a terep A pontjából 37 fokos, a terep B pontjából 45 fokos emelkedési szögben látszik. Milyen magasan lebeg a léggömb, ha az AB távolság 500 m, és a TB szög derékszög?

Megoldás: BTL háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $LT = TB$.

ABT háromszög egybevágó az ALT háromszöggel (SAS típus), mert két oldal és a közbezárt szög egyenlő. Részletezve: AT közös oldal, $LT = TB$, ATB szög = ATL szög = 90°, ezért $AL = 500$. Így az ALT derékszögű háromszögből $h = 500 \cdot \sin 37° \sim 300{,}9075$, tehát a léggömb kb. 301 méter magasságban lebeg.



FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és a külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2003. március 31.

Az alábbi feladatok mindegyikét *Kubatov Antal* kaposvári kolléga „gyűjtéséből" vette a rovatvezető.

215. Egy konvex négyszöget négy négyszögre bontunk a középvonalak behúzásával. Tudjuk, hogy a keletkezett négy négyszög mindegyikére teljesül, hogy a területük mértékszáma pozitív egész szám. Lehet-e az eredeti négyszög területe 2003 területegység?

216. Egy 8x8-as sakktábla négyzeteibe a bal felső sarokból indulva soronként balról jobbra és felülről lefelé haladva beírtuk a pozitív egész számokat 1-től 64-ig. Ezután a tábla mezőit minden lehetséges módon letakartuk egy 2x2-es négyzettel. Hány esetben lesz a letakart négyzetekben levő számok összege 3-mal osztható?

217. Két rabló elhatározta, hogy elássa a rabolt kincset egy folyótól nem messze. Kijelöltek egy A akácfát, és tőle nyugatra egy B bükkfát. Ezután a folyópart ugyanazon oldalán leszúrtak egy K karót a két fától nem túl messze. K-tól az egyik rabló elindult egyenesen B felé, ott jobbra fordult 90°-kal, majd ugyanakkora távolságra ment el a B-től a Q pontba, mint amennyire a karó volt. Ugyanezt tette a másik rabló is, de ő a $KA = AP$ utat tette meg úgy, hogy A-ban 90°-kal balra fordult. Majd egymás felé mentek a PQ egyenesen, s pontosan a PQ távolság felében elásták a kincset. Néhány hónap múlva visszamentek, de nagy megdöbbenéssel tapasztalták, hogy a karó nincs a helyén. Megtalálhatják-e a kincset?

218. Egy szabályos háromszög oldalának hossza n egység. Felbontjuk ezt a háromszöget egységnyi oldalú szabályos háromszögekre. Az így kapott ábrán kezdetben minden vonal kék színű. Az eredeti háromszög csúcsaiból indul három festő, A, B és C, akik felváltva ($ABCABC...$ sorrendben) egy-egy 1 hosszúságú szakaszon végigfutnak, és közben azt a szakaszt pirosra festik. Csomópontokban találkozhatnak, de csak kék vonalon indulhatnak tovább. Kiszínezhető-e az összes vonal pirosra?

219. Egy méterrúdra (1 m hosszú) felteszünk 12 hangyát. A hangyák elindulnak valamilyen irányba a rúdon, és ha két hangya találkozik, akkor megfordulnak, és változatlan – 1 m/perc – sebességgel folytatják útjukat. Ha a rúd végére érnek, akkor leesnek. Hogyan tegyük fel a hangyákat a rúdra, ha azt akarjuk, hogy a lehető leghosszabb ideig legyen (legalább egy) hangya a rúdon? (A hangyák kezdő helyzetből történő elindulási irányait mi szabhatjuk meg.)

Feladatmegoldások (200-204. feladatok)

200. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész n esetén az első 10^n darab pozitív egész számban összesen annyi számjegy van, mint ahány 0 az első 10^{n+1} darab pozitív egész számban összesen!

Megoldás: Legyen a_n az első 10^n darab pozitív egész számban megtalálható számjegyek és b_n az első 10^{n+1} darab pozitív egész számban

megtalálható 0-k száma. Könnyen belátható, hogy $a_1 = b_1 = 11$ és $a_2 = b_2 = 192$, illetve, hogy fennállnak az alábbi összefüggések ($n \geq 2$ egész):

$$a_n - a_{n-1} = n \cdot 9 \cdot 10^{n-1} + 1,$$

$$b_n - b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot 9^{n+1-k} + 1,$$

ahol k a 0-k száma egy $n + 1$ jegyű számban. Az $a_n = b_n$ egyenlőséghez elegendő bizonyítanunk, hogy $a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1}$ bármely 2-nél nem kisebb n egész szám esetén. (Ugyanis összegezve az egyenlőségeket kapjuk az $a_n - a_1 = b_n - b_1$ egyenlőséget, amiből $a_n = b_n$ következik.)

$$b_n - b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \cdot 9^{n+1-k} + 1 =$$

$$= 9n \sum k \binom{n-1}{k-1} \cdot 9^{(n-1)-(k-1)} + 1 =$$

$$= 9n \sum k \binom{n-1}{k-1} \cdot 9^{(n-1)-(k-1)} \cdot 1^{k-1} + 1 =$$

$$= 9n \cdot (9+1)^{n-1} + 1 = 9n \cdot 10^{n-1} + 1 = a_n - a_{n-1}$$

Ezzel beláttuk az állítást.

Molnár István, Gyula

A megoldók száma: 9.

201. Az ABC háromszög A, B és C csúcsaihoz tartozó belső szögfelezők a háromszög körülírt körét rendre a D, E és F pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy

$$BD \cdot DC \cdot CE \cdot EA \cdot AF \cdot FB = 4R^4 \cdot r^2,$$

ahol R a háromszög körülírt, r a háromszög beírt körének sugara!

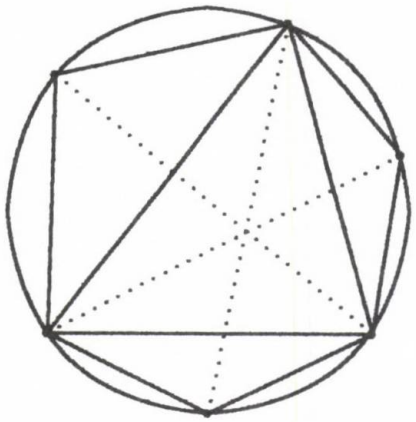
Bíró Bálint, Eger

Megoldás: Ismert tény, hogy a háromszög belső szögfelezője felezi a köréírt kör szemközti oldalhoz tartozó ívét *(1.ábra)*, ezért

$$BD = DC = 2R \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$CE = EA = 2R \sin\frac{\beta}{2},$$

$$AF = FB = 2R \sin\frac{\gamma}{2}.$$



1. ábra

(Felhasználtuk a kör sugara, húrja és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti ismert összefüggést.)

Így

$$BD \cdot DC \cdot CE \cdot EA \cdot AF \cdot FB =$$

$$= 64R^6 \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\frac{\beta}{2} \sin^2\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 4R^4 \cdot \left(4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

A zárójelben álló szorzat éppen a beírt kör sugara (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye II.* 48. oldal, 434/k feladat), azaz

$$r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: A feladat állítása általánosítható a következő módon: Legyen az ABC háromszög egy tetszőleges belső pontja M. Az AM, BM, CM egyeneseknek a háromszög köré írt körrel vett metszéspontjai legyenek rendre D, E, F. Ekkor

$$BD \cdot DC \cdot CE \cdot EA \cdot AF \cdot FB \leq 4R^4 \cdot r^2.$$

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 11.

202. Jelölje az ABC háromszög félkerületét s, beírt körének sugarát r, körülírt körének sugarát R. Igazoljuk, hogy

$$\frac{s^2-(r+2R)^2}{4R^2} \le \frac{1}{8}!$$

Oláh György, Révkomárom

I. megoldás: Felhasználjuk az ismert

$$R=\frac{abc}{4t} \quad \text{és} \quad t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

összefüggéseket. A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát alakítjuk:

$$\frac{s^2-(r+2R)^2}{4R^2}=\left(\frac{s}{2R}\right)^2-\left(\frac{r}{2R}+1\right)^2=$$

$$=\left(\frac{2ts}{abc}\right)^2-\left(\frac{2t^2}{abcs}+1\right)^2=$$

$$=\frac{4s^3(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2c^2}-$$

$$-\left(\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}+1\right)^2=$$

$$=4\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s^3-(s-a)(s-b)(s-c))}{a^2b^2c^2}-$$

$$-\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}-1=$$

$$=4\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(2s^3-s(ab+bc+ca))}{a^2b^2c^2}-1=$$

$$=4\frac{t^2(2s^2-(ab+bc+ca))}{a^2b^2c^2}-1=2\frac{t^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2b^2c^2}-1=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}-1.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$\frac{s^2-(r+2R)^2}{4R^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}-1. \qquad (1)$$

Másrészt az előző feladat megoldásánál is alkalmazott jól ismert összefüggések alapján

$$a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=$$

$$=4R^2(2-\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma))=$$

$$=4R^2\left(2-\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\right)^2+\frac{1}{4}\cos^2(\beta-\gamma)\right)\le 9R^2.$$

Ezt az egyenlőtlenséget alkalmazva (1) alapján

$$\frac{s^2-(r+2R)^2}{4R^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}-1\le\frac{1}{8},$$

ami a feladat állítását bizonyítja.

A bizonyításból látszik, hogy az egyenlőség szükséges és elegendő feltétele a

$$\cos(\beta-\gamma)=1 \quad \text{és} \quad \cos\alpha=\frac{1}{2}$$

egyenlőségek fennállása, ami pontosan akkor következik be, ha a háromszög szabályos.

Dályay Pál Péter, Szeged
Molnár István, Gyula

II. megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy

$$\frac{s^2-(r+2R)^2}{4R^2}=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \qquad (2)$$

Ismert trigonometrikus egyenlőtlenség (lásd pl. *Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. – 16-18. oldal), hogy ha α, β, γ egy háromszög belső szögei, akkor

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le\frac{1}{8},$$

és egyenlőség pontosan a szabályos háromszög esetén teljesül. Ebből (2) bizonyításával adódik a feladat állítása.

(2) igazolásához felhasználjuk az előző feladat megoldása során alkalmazott

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

összefüggést, valamint a

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

azonosságot (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye II.* 48. oldal, 434/b feladat).

$$\frac{s^2-(r+2R)^2}{4R^2}=$$

$$=\frac{R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2-\left(4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+2R\right)^2}{4R^2}=$$

$$=\frac{1}{4}((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)^2).$$

A négyzetre emelések, majd az összevonások elvégzése után kapjuk a (2) azonosságot.

Bencze Mihály, Brassó
Molnár István, Gyula
Nagy Béla, Sarkad
Simon József, Csíkszereda

A megoldók száma: 10.

203. Határozzuk meg azokat a folytonos $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket, melyek grafikonjának x tengellyel párhuzamos eltolása helyettesíthető egy x tengelyű merőleges affinitással!

Rakonczai György, Budapest

Megoldás: A feladat követelménye úgy is megfogalmazható, hogy keressük mindazon $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre teljesül, hogy bármely b valós szám esetén van olyan c valós szám, hogy

$$f(x+b) = c \cdot f(x) \qquad (1)$$

bármely valós x esetén.

Ha f-nek volna egy x_0 zérushelye, akkor, mivel $f(x_0) = 0$, ezért

$$f(x_0 + b) = c \cdot f(x_0) = 0$$

teljesülne bármely b valós szám esetén, azaz f az azonosan 0 függvény volna.

Bármely valós k esetén az $f(x) = k$, függvény eleget tesz (1)-nek, ugyanis

$$k = f(x+b) = c \cdot f(x) = c \cdot k,$$

ahonnan $c = 1$.

Ha f-nek nincs zérushelye, akkor két eset lehetséges: minden valós x-re $f(x) > 0$, vagy minden valós x-re $f(x) < 0$.

Vizsgáljuk előbb az első esetet. Ekkor (1) bármely b értékéhez tartozó c érték pozitív, ezért felírható $c = a^b$ alakban, ahol a alkalmasan választott pozitív valós szám. Ezzel (1):

$$f(x+b) = a^b \cdot f(x). \qquad (2)$$

Legyen $f(0) = d$ $(d>0)$ $\cdot$ $x = 0$ esetén (2):

$$f(b) = d \cdot a^b$$

bármely valós b esetén b helyére x-et írva

$$f(x) = d \cdot a^x (d > 0). \qquad (3)$$

Ha $f(x) < 0$, akkor d negatív, de a függvény alakja ugyanúgy a (3) képletnek megfelelő.

Összefoglalva az eddigieket: kaptuk, hogy ha f kielégíti (1)-et, akkor $f(x) = d \cdot a^x$, ahol d valós szám, a pedig pozitív valós szám.

Megfordítva: minden ilyen alakú f függvény eleget tesz az (1) feltételnek, ugyanis

$$f(x+b) = d \cdot a^{x+b} = d \cdot a^x \cdot a^b =$$
$$= a^b \cdot (d \cdot a^x) = c \cdot f(x)$$

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 5.

204. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre teljesül, hogy ha egy 2002x2002-es, kezdetben színezetlen sakktáblán n mezőt kiszínezünk, akkor van három olyan színezett mező, amelyek középpontjai olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, amelynek befogói párhuzamosak a tábla oldalaival?

USA Mathematical Olympiad (2000) egyik feladata alapján

Megoldás: A feladatot általánosan, k x k mezőből álló sakktáblára oldjuk meg, és kicsit módosított formában. Azt a legnagyobb n számot fogjuk megkeresni, amelyre teljesül, hogy n mezőt beszínezve még nincs a táblán a feladatban előírt tulajdonságú háromszög. Az eredeti feladat megoldása így $n + 1$ lesz.

Vegyük észre, hogy ha egy sorban két színezett mező van, akkor egyik mező oszlopában sem lehet színezett mező, hiszen ekkor a feladatban megfogalmazott párhuzamosság lépne fel.

Számoljuk össze soronként a színezett mezőket, és az egyes sorokban levő mezők számát rakjuk nagyság szerint növekvő sorrendbe. Ha az i-edik sorban a mezők száma x_i, akkor

$$n = \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{j=1}^{k} y_j,$$

ahol $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k$. Legyen $j = 1$-től $j = l$-ig $y_j \le 1$, és $j = l + 1$-től $j = k$-ig $y_j \ge 2$. A

$$\sum_{j=l+1}^{k} y_j$$

összeg a fenti észrevétel miatt azon oszlopok száma, amelyekben nem lehet színezett négyzet, így

$$\sum_{j=l+1}^{k} y_j \le k - 1.$$

Másrészt

$$\sum_{j=1}^{l} y_j \le l,$$

hiszen itt minden tag értéke legfeljebb 1. Ezek alapján $n \le l + k - 1$. Mivel n maximális értékét keressük, ezért kell lennie olyan sornak, ahol legalább két színezett négyzet van, azaz $l \le k - 1$. Kaptuk, hogy $n \le 2(k - 1)$, tehát n maximális értéke $2k - 2$ lehet.

Ez meg is valósítható a következőképpen: vegyük a tábla egy sorát és egy oszlopát, és ezek egyesítésének minden mezőjét színezzük ki a közös mező kivételével.

Az eredeti feladatban $k = 2002$, így a fenti gondolatmenet alapján akárhogyan is színezünk ki 4003 mezőt, biztosan lesz három olyan mező, amelyek középpontjai a tábla határával párhuzamos befogójú derékszögű háromszöget határoznak meg.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 7.

A megoldók névsora: Bencze Mihály, Brassó (201., 202.); Csorba Ferenc, Győr (200-202., 204.); Dályay Pál Péter, Szeged (200-204.); Kamarás Lajos, Pécs (200-203.); Kiss Géza, Kisújszállás (201.); László Sándor, Szombathely (201., 202.); Molnár István, Gyula (200., 201., 202. 3 mód, 204.); Nagy Béla, Sarkad (200-204.); Rakonczai György, Budapest (200., 201., 203., 204.); Simon József, Csíkszereda (200-202.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (200-202., 204.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (200-204.).

Új tankönyv a 2003/2004-es tanévre

Sokszínű matematika 11. osztály

(Sz.: Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István)

A Mozaik Kiadó 9. és 10. osztályos matematika tankönyvének stílusát, felépítésének „hagyományait" követve elkészült a 11. osztályos tankönyv kézirata is, amelyet az Oktatási Minisztérium által felkért szakértőkből álló bizottság tankönyvvé nyilvánított.

A tankönyv tartalmi szempontból is, feladatanyagában is maximálisan igyekszik figyelembe venni mindazokat a fejlesztési feladatokat és tevékenységeket, amelyeket a tantárgyi kerettanterv előír. Ez szándékaink szerint megnyilvánul az egyes fejezetek és alfejezetek (leckék) felépítésében, az ismeretanyag tárgyalásában és a sokrétű alkalmazásokban is.

– Az egyes alfejezetek (leckék) zömében úgy épülnek fel, hogy konkrét mintapéldával igyekszünk megvilágítani az új ismeret szükségességét és bevezetésének módját. Az általános tárgyalás csak ezután következik.

– Az új ismeret tárgyalásában az életkori sajátosságoknak megfelelő logikai szigorúságra (pontos definíciók, pontosan kimondott tételek, tételmegfordítások, az alkalmazási kör tisztázása) törekedtünk.

– Az új ismeretek alkalmazási lehetőségeit is mintapéldákon keresztül mutatjuk be. A mintapéldák kapcsán a megoldások leírásával demonstrálni szeretnénk a különböző megközelítési lehetőségeket, és a megismert módszer, algoritmus, tétel felhasználásának módját. Ahol az ismeretanyag lehetővé teszi, több megoldást is mutatunk a mintapéldákra.

– Minden egyes alfejezet (lecke) után kitűzött feladatok biztosítják az ismeretek, módszerek, algoritmusok rögzítését, gyakorlását.

– Mind a mintapéldák, mind a kitűzött feladatok összeállítása kapcsán törekedtünk annak bemutatására, hogy a tárgyalt matematikai ismeretek hogyan alkalmazhatók a hétköznapi életben, és más tudományterületeken (fizika, kémia, biológia, társadalomtudományok).

– A kerettantervi tananyag, az egyes anyagrészek kiváló lehetőséget biztosítanak a matematikai modellalkotás fontosabb lépéseinek bemutatására, a modell „működtetésére", és a kapott eredmények interpretálására. Megpróbáltunk maximálisan élni ezzel a lehetőséggel.

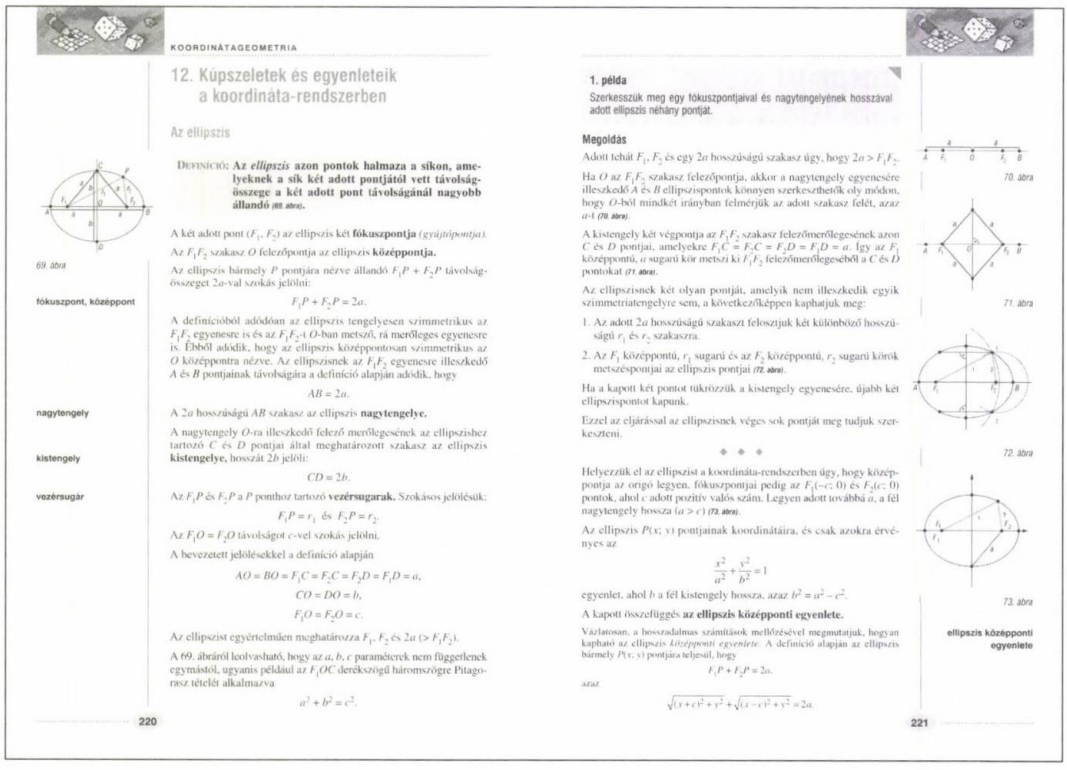
– A 9. és 10. osztályos tankönyvhöz hasonlóan ebben a könyvben is rövid matematikatörténeti utalásokkal, megjegyzésekkel színesítettük a tananyagot.

A tankönyv fejezetei:

1. Kombinatorika, gráfok
2. Hatvány, gyök, logaritmus
3. A trigonometria alkalmazásai
4. Függvények
5. Koordináta-geometria
6. Valószínűségszámítás, statisztika

A tankönyv teljes anyaga a kerettantervi minimális heti 3 óra helyett heti 3,5-4 órában tanítható ideálisan. A kerettantervhez képest kiegészítő anyagrészek a könyvben jól elkülönülnek, ezek feldolgozására kötelező tanórán kívüli foglalkozások (pl. szakkör) keretében is lehetőség van. Törekedtünk arra, hogy a kiegészítő részeket az érdeklődő diákok önállóan is fel tudják dolgozni. A kerettantervi tananyagot meghaladó anyagrészek tárgyalásával céljaink a következők:

– Az ismeretek elmélyítése, olyan rejtett összefüggések megmutatása, amelyek a teljes megértést segítik. (Pl. a kerettanterv a kúpszeletek közül csak a parabola tárgyalását írja elő. A tankönyv nem teljes mélységében tárgyalja ugyan, de megemlíti az ellipszis és a hiperbola definíci-



KOORDINÁTAGEOMETRIA

12. Kúpszeletek és egyenleteik a koordináta-rendszerben

Az ellipszis

69. ábra

fókuszpont, középpont

DEFINÍCIÓ: **Az *ellipszis* azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík két adott pontjától vett távolságösszege a két adott pont távolságánál nagyobb állandó** *(69. ábra)*.

A két adott pont (F_1, F_2) az ellipszis két **fókuszpontja** *(gyújtópontja)*.

Az F_1F_2 szakasz O felezőpontja az ellipszis **középpontja.**

Az ellipszis bármely P pontjára nézve állandó $F_1P + F_2P$ távolságösszeget $2a$-val szokás jelölni:

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

A definícióból adódóan az ellipszis tengelyesen szimmetrikus az F_1F_2 egyenesre is és az F_1F_2-t O-ban metsző, rá merőleges egyenesre is. Ebből adódik, hogy az ellipszis középpontosan szimmetrikus az O középpontra nézve. Az ellipszisnek az F_1F_2 egyenesre illeszkedő A és B pontjainak távolságára a definíció alapján adódik, hogy

$$AB = 2a.$$

nagytengely

A $2a$ hosszúságú AB szakasz az ellipszis **nagytengelye.**

kistengely

A nagytengely O-ra illeszkedő felező merőlegesének az ellipszishez tartozó C és D pontjai által meghatározott szakasz az ellipszis **kistengelye,** hosszát $2b$ jelöli:

$$CD = 2b.$$

vezérsugár

Az F_1P és F_2P a P ponthoz tartozó **vezérsugarak.** Szokásos jelölésük:

$$F_1P = r_1 \text{ és } F_2P = r_2.$$

Az $F_1O = F_2O$ távolságot c-vel szokás jelölni.

A bevezetett jelölésekkel a definíció alapján

$$AO = BO = F_1C = F_2C = F_2D = F_1D = a,$$

$$CO = DO = b,$$

$$F_1O = F_2O = c.$$

Az ellipszist egyértelműen meghatározza F_1, F_2 és $2a$ ($> F_1F_2$).

A 69. ábráról leolvasható, hogy az a, b, c paraméterek nem függetlenek egymástól, ugyanis például az F_1OC derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

220

1. példa

Szerkesszük meg egy fókuszpontjaival és nagytengelyének hosszával adott ellipszis néhány pontját.

Megoldás

Adott tehát F_1, F_2 és egy $2a$ hosszúságú szakasz úgy, hogy $2a > F_1F_2$.

70. ábra

Ha O az F_1F_2 szakasz felezőpontja, akkor a nagytengely egyenesére illeszkedő A és B ellipszispontok könnyen szerkeszthetők oly módon, hogy O-ból mindkét irányban felmérjük az adott szakasz felét, azaz a-t *(70. ábra)*.

71. ábra

A kistengely két végpontja az F_1F_2 szakasz felezőmerőlegesének azon C és D pontjai, amelyekre $F_1C = F_2C = F_2D = F_1D = a$. Így az F_1 középpontú, a sugarú kör metszi ki F_1F_2 felezőmerőlegeséből a C és D pontokat *(71. ábra)*.

Az ellipszisnek két olyan pontját, amelyik nem illeszkedik egyik szimmetriatengelyre sem, a következőképpen kaphatjuk meg:

1. Az adott $2a$ hosszúságú szakaszt felosztjuk két különböző hosszúságú r_1 és r_2 szakaszra.
2. Az F_1 középpontú, r_1 sugarú és az F_2 középpontú, r_2 sugarú körök metszéspontjai az ellipszis pontjai *(72. ábra)*.

72. ábra

Ha a kapott két pontot tükrözzük a kistengely egyenesére, újabb két ellipszispontot kapunk.

Ezzel az eljárással az ellipszisnek véges sok pontját meg tudjuk szerkeszteni.

◆ ◆ ◆

Helyezzük el az ellipszist a koordináta-rendszerben úgy, hogy középpontja az origó legyen, fókuszpontjai pedig az $F_1(-c; 0)$ és $F_2(c; 0)$ pontok, ahol c adott pozitív valós szám. Legyen adott továbbá a, a fél nagytengely hossza ($a > c$) *(73. ábra)*.

73. ábra

ellipszis középponti egyenlete

Az ellipszis $P(x; y)$ pontjainak koordinátáira, és csak azokra érvényes az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenlet, ahol b a fél kistengely hossza, azaz $b^2 = a^2 - c^2$.

A kapott összefüggés **az ellipszis középponti egyenlete.**

Vázlatosan, a hosszadalmas számítások mellőzésével megmutatjuk, hogyan kapható az *ellipszis középponti egyenlete*. A definíció alapján az ellipszis bármely $P(x; y)$ pontjára teljesül, hogy

$$F_1P + F_2P = 2a,$$

azaz

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

221

óját, alapvető tulajdonságait, valamint forgáskúp síkmetszeteiként történő származtatását is).

– Néhány összetettebb példa, különösen a *Kombinatorika, gráfok* és a *Valószínűségszámítás, statisztika* témakörök kapcsán a matematikai modell és a valóság kapcsolatának bemutatása miatt került a könyvbe. Mint már utaltunk rá, ezt nagyon fontosnak tartjuk.

– Bizonyos matematikai eszközök, fogalmak, eljárások alkalmazási körének bővebb bemutatása (pl. két vektor skaláris szorzata).

– A korábban tanult ismeretek és az új ismeretek közötti, a matematika belső logikai rendszerének mélyebb megértését szolgáló kapcsolatok bemutatása (pl. szintetikus és analitikus geometriai modell, a függvények rendszerezése, bizonyítási módszerek).

– Az emelt szintű érettségi vizsgára való felkészülés segítése.

Néhány példa a tankönyvből:

1. *Hat fiú (Csaba, Dénes, Gábor, Hugó, János, Tamás) közül pontosan kettő almát lopott. Öt fiú vallomása a következő:*

Hugó: Csaba és Gábor a tettes.

János: Dénes és Tamás a bűnös.

Dénes: Tamás és Csaba tette.

Gábor: Hugó és Csaba a tolvaj.

Csaba: Dénes és János követték el.

A vallomások közül négyben az egyik bűnöst helyesen, a másikat helytelenül nevezték meg. Az ötödik – sorrendben nem feltétlenül ötödik – vallomásban megnevezettek mindketten ártatlanok. Kik lopták el az almákat?

Ennek az alapvetően logikai feladatnak egy gráfos megoldása található a könyvben.

2. *A szegedi Dóm toronyórájának nagymutatója 3 m, kismutatója 2 m hosszú. Milyen távol lesznek egymástól a mutatók végpontjai pontban 8 órakor?*

Ez egy mintapélda a koszinusztétel alkalmazására.

3. *A Bingo játék során az 1 és 100 közé eső számok közül húznak egyenként. Zsófi észrevette, hogy az ő tábláján levő számok mind oszthatók 3-mal vagy 5-tel. Mi a valószínűsége annak, hogy az első kihúzott szám osztható 3-mal vagy 5-tel?*

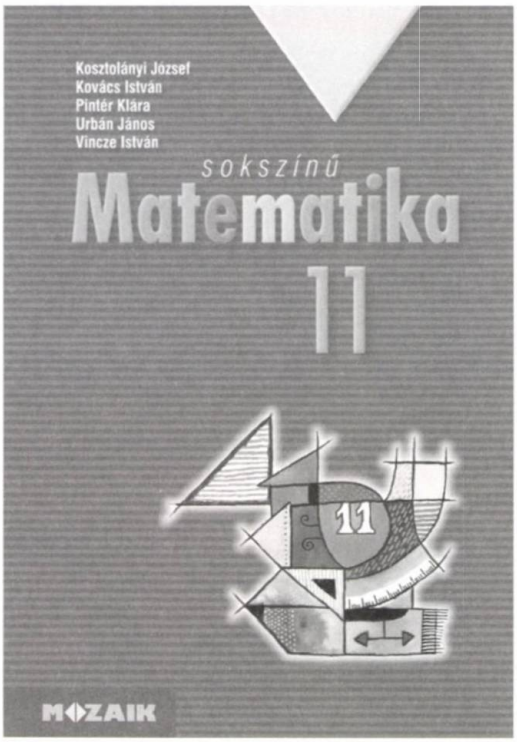
Az események összegének valószínűségére vonatkozó tételt előkészítő mintapélda.

4. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a* $3^{|x|} + 4^{|x|} = 7^{|x|}$*a egyenletet.*

Ez a példa azt illusztrálja, hogy bizonyos függvénytulajdonságok hatékonyan alkalmazhatók egyenletek megoldása során.

Úgy gondoljuk, hogy a tanárnak kell eldöntenie a tanítandó diákok képességeinek, felkészültségének és saját szakmai ízlésének megfelelően, hogy milyen tankönyvet választ, és a tankönyv által nyújtott lehetőségeket milyen mértékben használja ki. Bízunk abban, hogy mindazok a tanárok, akik ezt a könyvet választják, tanítványaikkal együtt haszonnal forgatják majd a Sokszínű matematika tankönyvsorozatnak ezt a kötetét is.

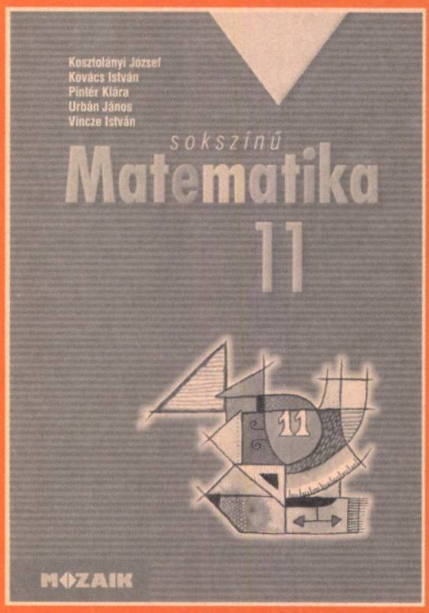
Kosztolányi József



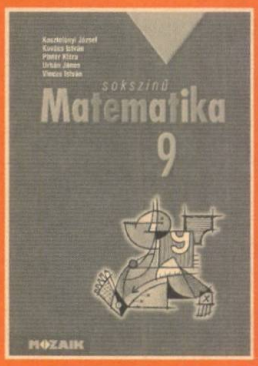
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD

EGYEDÜLÁLLÓ SIKER A TANKÖNYVEK KÖZÖTT

Tavaly három rangos díjat is elnyert az új 9. évfolyamos matematika tankönyv: a *Nemzetközi Könyvfesztivál* Budai-díját, a *Szép Magyar Könyv 2001* Verseny díját és különdíját. A sorozat 10. osztályos kötete a 2002/2003-as tanévre került az iskolákba. A sorozat következő tagja pedig 2003. augusztusában jelenik meg. A tankönyvek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek. A köteteket Ábrahám István szellemes, fantáziadús rajzai színesítik.



MATEMATIKA KÖNYVEK A SIKERES FELVÉTELI VIZSGÁHOZ



MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERESEGHY KÖNYVTÁR

Bevezetés a hibajavító kódolásba I. rész

(Hraskó András – Szőnyi Tamás)

Játsszunk néhány matematikai ideával! II. rész

(Dienes Zoltán)

A $\sqrt{2}$ újra! (A négyzet területének geometriai többszörözése)

(Ringler András)

XI. ÉVFOLYAM 2003 2

MOZAIK

www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1200 Ft

A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Bevezetés a hibajavító kódolásba I.
Hraskó András – Szőnyi Tamás,
Budapest

Játsszunk néhány matematikai ideával! II.
Dienes Zoltán
professzor, Kanada

A $\sqrt{2}$

A négyzet területének geometriai többszörözése
Ringler András
docens, Szeged

Szerkesszük újra!
Csorba Ferenc
tanár, Győr

Egy mezopotámiai transzformációról
Csete Lajos
tanár, Markotabödöge

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Hraskó András – Szőnyi Tamás

Bevezetés a hibajavító kódolásba I.

Az adatok továbbításának három fő problémája a *biztonság*, a *titkosság* és a *tömörség*. A biztonság kérdésének matematikai alapjaival a *kódelmélet*, a titkosságával a *kriptográfia*, a tömörséggel elsősorban az *információelmélet* foglalkozik, de ez a három témakör nem különíthető el ennyire mereven.

A kriptográfia témakörében a [9], az információelmélettel kapcsolatban a [6], [7], [8] könyveket ajánljuk az érdeklődőknek. Ebben a cikkben a biztonság kérdését, a kódelmélet alapkérdéseit vizsgáljuk. Néhány, a témával kapcsolatos szituáció a gyakorlatban:

1. Azonosítók

Az állampolgárokat, a könyveket, a bolti árukat, a vasúti kocsikat stb. mind nyilvántartják valahol, és ehhez azonosítókat használnak. Az állampolgárok esetében ez (volt korábban) a személyi szám, a könyveknél az ISBN szám (International Standard Book Number), az áruk esetében az EAN szám (European Article Numbering system). Az azonosítókat emberek „viszik be" a rendszerbe, illetve az azonosítók alapján emberek kérdeznek le információkat. Az ember többször hibázik, mint a számítógép. Hajlamosak vagyunk a begépeléskor elütni egy-egy karektert, néha pedig fölcserélünk kettőt. Az ilyen hibák nem okoznak túl nagy galibát, amikor egy amúgy értelmes szöveget olvasunk, de súlyos kellemetlenségek forrásai lehetnek egy adatnyilvántartó rendszerben. Ezért a nyilvántartási számokat úgy alakítják ki, hogy ilyen hibák lehetőleg ne fordulhassanak elő.

2. Sérülékeny adattárak és kommunikációs csatornák

Egy lassan már mindenki által ismert információhordozó a CD (Compact Disc). Kedvenc zenelemezünket gyakran vesszük kézbe, könnyen előfordulhat, hogy ujjunkról zsírfolt kerül rá, por tapad meg rajta, az se kizárt, hogy megkarcoljuk. A fölvétel során olyan kódolási eljárást alkalmaznak, hogy a lemez lejátszása során a dekódoló berendezés az ilyen hibákat nagymértékben fel tudja ismerni, sőt ki tudja javítani és a hibák ellenére az eredeti felvételt játssza le.

A Mariner és Voyager szondák képeket küldtek Naprendszerünk bolygóiról a Földre. Ezek a nagyon távolról jött jelek hihetetlenül gyengék, így a vevőberendezésben óhatatlanul meglevő zaj miatt könnyen félreérthetőek. Ha nem használtak volna kódolási eljárást, akkor a fényképek teljesen használhatatlanok lennének.

Alább feladatok, azok megoldása és a CD matematikájáról írt rövid esszé segítségével szeretnénk tanároknak és diákoknak bevezetést adni a kódolás témakörébe. Gyakran hivatkozunk az [1], [2] művekre, mindkettőben több itt is kitűzött feladat részletesebb megoldását olvashatjuk, a [2] cikkünk vagy a [6] könyv segítségével a kódolás matematikai elméletével is alaposabban megismerkedhetünk.

A következő fejezetben a feladatokat tematikusan gyűjtöttük össze; az órán, szakkörön való feldolgozáshoz egy lehetséges jobb sorrend a következő:

I. ütem: 5.1, 2.6, 5.8, 3.1, 1.1, 5.2.

II. ütem: számolás mód *n*. (Lehet ez az I. ütem.)

III. ütem: 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, a hibajelző bit, az 1-hibajavító kód, 1-törlés javító kód fogalmának tisztázása, 4.4.

IV. ütem: 1.2, válogatás a 2.1- 2.5 példákból kedv szerint, a hibajavító kód fogalma, 4.6, 5.6, közben 4.5, 4.11 tisztázása.

V. ütem: 4.10, 4.7, 4.8, 4.9, 5.9.

VI. ütem: A CD-ről szóló esszé feldolgozása, [2] elolvasása, a megmaradt feladatok megoldása.

Egy-egy ütem néhány órát jelent és nem baj, ha két ütem között hosszabb idő telik el, ha sikerül feleleveníteni a korábbi élményeket.

Feladatok

1. Mérlegelés

F 1.1 Egy cég 10 szériában gyártott egész kg-os súlyokat. Az első szériában 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, . . . a tizedikben 10 kg-os súlyokat terveztek készíteni. Az azonos szériában készült egyforma súlyokat ugyanabban a ládában tartják, mind a 10 ládára rá van írva, hogy hanyadik szériában készült. Az egyik széria hibás lett, példányai egyforma súlyúak, de ez az érték nem egyezik meg az előre adott értékkel.

a) Egy kijelzős mérleg egyszeri használatával kell megtalálnunk, hogy mennyivel nehezebbek vagy könnyebbek a hibás súlyok az előírtnál.

b) Ezután határozzuk meg, hogy melyik súly szériája lett hibás! Most is csak a kijelzős mérleget használhatjuk, és azt is csak még egyszer.

c) Próbáljuk meg általánosítani előző eredményeinket. Fontos volt-e, hogy épp 10 széria volt? Lényeges-e, hogy rendre épp 1, 2, 3, ... 10 kg-osak a súlyok az egyes szériákban? Fogalmazzuk meg általánosan a feladatot, és adjunk választ az a), b) kérdésekre az általános esetben is!

d) Módosítunk az eredeti feladaton. Tegyük fel, hogy mindegyik súly megfelelő tömegű (az egyes szériákban rendre 1, 2, ... 10 kg), de előfordulhat, hogy amikor a ládákat a bennük lévő súlyok növekvő sorrendjében betolták a raktárba egymás mellé, akkor két szomszédos ládát felcseréltek. Ezután rakták rájuk sorban a szériaszámokat, amelyek így most növekvő sorrendben vannak, de lehet, hogy az egyik szomszédos párnál nem a ládában levő súlyok tömegét jelzik. Hány méréssel lehet megállapítani, hogy történt-e ilyen tévesztés?

F 1.2 Egy cég 5 szériában gyártott súlyokat. Az egyes szériákon belül mindegyik súly egyforma tömegű, de nem ismert, hogy mekkorák. Az éppen távol levő cégvezető meg szeretné tudni, hogy milyen tömegű súlyokat gyártottak. Ezért egy mérési űrlapot küld egyik alkalmazottjának, majd annak kell elvégeznie a méréseket, és visszaküldeni az eredményekkel kitöltött űrlapot.

Legalább hány mérést kell elvégezni, és mik legyenek ezek a mérések (hogyan töltse ki a cégvezető az 1., 2., ..., 5. oszlopokat), ha várható, hogy (legfeljebb) egyszer az alkalmazott hibás értéket ír be a „Mért tömeg" rovatba?

Az űrlap így néz ki:

	Hány súly legyen a mérlegen az egyes szériákból?					Mért tömeg (kg)
	1.	2.	3.	4.	5.	
1. mérés						
2. mérés						
3. mérés						
4. mérés						
5. mérés						
6. mérés						
7. mérés						
8. mérés						
9. mérés						
10. mérés						
11. mérés						

2. Szójátékok

F 2.1 Írj az üres helyre betűt úgy, hogy értelmes magyar szót kapj! Hány megoldás van az egyes esetekben?

_AP, B_R, HA_

F 2.2 Oldd meg a 2.1 feladatot angol nyelven értelmes szavakkal is!

F 2.3 A következő szavakban egy-egy betűt megváltoztathatsz, de értelmes magyar szót kell kapnod. Hány megoldás van az egyes esetekben?

HÁZ, KEREK

F 2.4 Keress olyan legfeljebb ötbetűs magyar szót, amelyben az egyik betűt sem lehet úgy megváltoztatni, hogy egy másik értelmes magyar szót kapjunk!

F 2.5 Keress a 2.1-2.3 feladattípusok bármelyikében olyan példát, amelynek az adott szóhosszúság esetén a legtöbb megoldása van!

F 2.6 Egy négybetűs szóra gondoltam. Alább néhány tippet és a rájuk adott választ láthatod. Csak akkor jelöltem találatot, ha a betű a helyén is volt.

HÁGÓ 0, TÉLI 2, BÁNJ 1,
FÓKA 1, FALA 2.

Melyik szóra gondolhattam?

3. Kódolnak a nebulók

F 3.1 (*Dobos Sándor javaslata*)

A gyerekek párokat alkotnak. A pároknak az a feladata, hogy kitaláljanak egy kódrendszert, amellyel 0-tól egy általuk megnevezett n számig bármely egész számot le tudnak kódolni egymásnak öt pénzérmével az üres tanári asztalon. Gondolkodás után minden pár bemondja, hogy meddig tud kódolni (n). A legnagyobbat mondó pár egyik tagja kimegy, a másig bennmarad. A tanár mond a bennmaradónak egy számot a megadott tartományban, amit az lekódol az asztalon. Ezután a másik bejön és kitalálja a számot.

F 3.2 A feladat ugyanaz, mint a 3.1-ban, azzal a különbséggel, hogy a tanár kilátásba helyezi, hogy esetleg egy pénzdarabot le fog venni az asztalról, mielőtt bejön az a nebuló, akinek ki kell találnia a számot. Most új kódrendszert, és új n korlátot kell megadnia a pároknak.

4. Kódok a gyakorlatban

F 4.1 (Pálvölgyi Dömötör példája, Bergengóc példatár 2. 237. fel.)

A budapesti telefonszámok hétjegyűek. Sokszor előfordul, hogy valaki két szomszédos számot felcserél, ezért téves a hívása. Keress minél egyszerűbb eljárást arra, hogy a hétjegyű számok végére még egy ellenőrző számot téve, a központ számcsere (két szomszédos felcserélése) esetén jelezni tudja, hogy a szám téves, és ne kapcsoljon!

F 4.2 Menjünk át a könyvtárba és nézzük meg sok különböző könyv azonosítóját, az úgynevezett ISBN (International Standard Book Number) számot! Próbáljuk meg kideríteni, milyen részekből áll, hogyan épül fel ez az azonosító! (Segítség: a legutolsó jegy egy ellenőrző jegy, segítségével kiszűrhető bármelyik két számjegy felcserélése, illetve bármelyik jegy elírása. A többi jegy három csoportba osztható és a könyv azonosítására szolgál.)

F 4.3 Gyűjtsd össze rokonaid, ismerőseid személyi számát (ez nem ugyanaz, mint a személyi igazolvány száma)! Próbáld meg kitalálni, hogyan épül fel ez az azonosító! (Segítség: az utolsó számjegy egy ellenőrző jegy, értéke meghatározható a többi jegyből. Az előtte álló három számjegy egy sorszám.)

F 4.4 Olyan adatátviteli nyelvet szeretnénk kidolgozni, amely

I. csak háromféle betűt használ;

II. minden értelmes szó három betűből áll;

III. Ha egy értelmes szóból csak egy betűt nem ismerünk (de tudjuk, hogy hanyadikat), akkor azt már ki tudjuk találni a többi betűjéből.

Legfeljebb hány értelmes szó lehet egy ilyen nyelvben?

F 4.5 Bizonyítsd be, hogy egy kód[1] pontosan akkor 1-hibajavító, ha bármelyik két kódszó legalább három helyen különbözik egymástól!

[1] *Az 4.5-4.11 feladatokban szereplő fogalmak magyarázatát a megoldások között, a 4. fejezet elején adjuk meg*

F 4.6 Keress háromféle betű alkalmazásával minél több szóból álló négybetűs 1-hibajavító kódot!

F 4.7 Összehasonlítunk három kódot! Mindhárom kód kilenc szóból áll, mindegyik egy hárombetűs ABC-t használ.

k_1) *A legegyszerűbb:* A szavak kétbetűsek, a kilenc kódszó az összes kétbetűs szó.

k_2) *Mindent háromszor:* A szavak hatbetűsek és úgy készülnek, hogy a kétbetűs szót háromszor írjuk le egymás után.

k_3) *A sűrű:* A szavak négybetűsek, a 4.6 feladatban meghatározott 1-hibajavító tökéletes kódot alkotják.

Tegyük fel, hogy egy betű a kommunikáció során 10% eséllyel megváltozik és 90% eséllyel jól továbbítódik. k_2 és k_3 esetén a kiolvasott jelsorozatot mindig a tőle legkevesebb jelben eltérő kódszóra változtatjuk. Határozzuk meg a három esetben külön-külön, hogy mi az esélye, hogy egy szót úgy olvasunk ki, ahogy elküldték!

F 4.8 Legyen most a betűhiba esélye q, a hibátlan betűé pedig $p = 1 - q$. (A 4.7 feladatban $p = 0,9$, $q = 0,1$ volt.) Tekintsük át p minden lehetséges értékét és rakjuk sorrendbe a k_1, k_2 és k_3 kódokat aszerint, hogy melyiknél esélyesebb egy szó helyes kiolvasása!

F 4.9 Keress kétféle betű alkalmazásával minél több szóból álló k-betűs 1-hibajavító kódot, $k = 1; 2; \ldots; 6$ esetén! Töltsd ki az alábbi táblázatot!

szavak hossza (k):	1	2	3	4	5	6
kódszavak száma:						

F 4.10 Ha adott egy négyzet alakú H_i számtáblázat, akkor elkészíthetjük a kétszer akkora oldalhosszúságú

$$H_{2i} = \begin{pmatrix} H_i & H_i \\ H_i & -H_i \end{pmatrix}$$

számtáblázatot. Induljunk ki az 1 x 1-es $H_1 =$ (1) „számtáblázat"-ból, és képezzük a $H_2 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

H_4, H_8, H_{16}, H_{32} számtáblázatokat. H_{32}-nek már 32 sora van, mindegyikben egy 32 hosszú számsorozat, csupa 1-gyel és – 1-gyel. Tekintsük ezt a 32 sorozatot és – 1-szereseiket. Álljon kódunk ebből a 64 sorozatból, csak a – 1-eket cseréljük ki 0-kra. Határozzuk meg az így kapott bináris kód minimális távolságát![2]

F 4.11 Bizonyítsd be, hogy egy kód pontosan akkor

a) k-hibajavító, ha minimális távolsága legalább $2k + 1$;

b) k-hibajelző, ha minimális távolsága legalább $k + 1$;

c) k-törlésjavító, ha k-hibajelző!

5. Barkochbák, totók, játékos feladatok

F 5.1 (*Dobos Sándor példája*)
Számrontó Rezsőnek két módszere van egy szám elrontására. Vagy egy számjegyet tetszőlegesen megváltoztat (pld. 5437 → 5487), vagy két számjegyet kicserél (pld. 5437 → 3457). Egyszer véletlenül az asztalon hagytam egy cetlit a másológép négyjegyű belépési számával. Rezső ezt meglátta és rögtön átjavította 1323-ra. Szerencsére észrevettem, és visszajavítottam az eredeti számra. De amikor legközelebb lehetősége adódott, Rezső megint elrontotta a cetlin lévő számot, így most 1213 van ráírva. Mi lehet a másológép belépési száma?

F 5.2 Egy hajó és utasai, összesen 100 fő, Ungabunga szigetén az emberevők fogságába esett. Tudják, hogy másnap reggel a kannibálok leültetik őket egymás mögé, és mindegyikük fejére egy-egy piros vagy kék sapkát húznak. Mindenki csak az összes előtte ülő ember fején lévő

[2] *Ennek a kódnak az alkalmazásával küldte a fényképeket a Mariner 10 szonda a Földre. A 64 sorozat 64 színnek felelt meg, egy sorozat egy képpont (pixel) színét határozta meg.*

sapkát fogja látni, a sajátját és a mögötte ülőkét nem. A leghátsó embertől kezdve sorban mindenki hangosan mondhat majd egy színt: pirosat vagy kéket. A végén azt engedik szabadon, aki saját sapkája színét mondta, aki nem találta el, azt bizony megeszik. A kannibálok szigorúak, ha bárki mást tesz, minthogy a lehető legegyszerűbben kimondja a „piros" vagy a „kék" szót, akkor senkinek sem kegyelmeznek. A foglyoknak még egy esélye van. Most este még összebeszélhetnek. Szeretnék, hogy minél többen megszabaduljanak. Hány fogoly tud biztosan megmenekülni?

Könnyítés: oldjuk meg előbb a feladatot abban az esetben, ha tudjuk, hogy összesen pontosan

a2) két;

a10) tíz;

piros sapka van a 100 között!

F 5.3 Gondoljuk végig a 5.2 feladatot kettő helyett három színnel! Minden rab fején háromféle sapka lehet, és mindenki háromféle színt is mondhat.

F 5.4 Lépjünk tovább a 5.2-5.3 feladatokkal! Mi a helyzet n szín esetén?

F 5.5 A térbeli sakktáblán a bástya a tábla oldaléleivel párhuzamosan tud lépni. Legfeljebb hány bástya helyezhető el a táblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást, ha a tábla

a) 3 x 3 x 3-as?

b) 8 x 8 x 8-as?

F 5.6 Bergengóciában a totó a bajnokságnak megfelelően csak 4 mérkőzést tartalmaz. Minden mérkőzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1-gyel, 2-vel vagy X-szel. Egy szelvényen csak egy tipposzlop van.

a) Hány szelvényt kell venni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk?

b) És ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szelvényünk, amely legalább 3 találatos?

F 5.7 A szenvedélyes játékosok már régóta keresik az olyan nyerőesélyes tipprendszereket, úgynevezett totókulcsokat, mint amilyet a 5.6 feladatban is kerestünk. Mégis, már „kicsinek" tűnő esetekben sem ismeretes, hogy legkevesebb hány szelvény kell bizonyos számú találat eléréséhez. Az alábbi táblázat (forrás: [5]) mutatja, hogy mit tudott a világ 1995-ben. Az n a mérkőzések számát jelöli, r pedig azt mutatja, hogy legfeljebb hány találatot engedünk ki a kezünkből. A 5.6 feladat az $n = 4$, $r = 1$ esetnek felel meg.

n/r	1	2	3
1	1		
2	3	1	
3	5	3	1
4	9	3	3
5	27	8	3
6	63-73	12-17	6
7	150-186	26-34	7-12
8	393-486	52-81	13-27
9	1048-1356	128-219	25-54
10	2818-3645	323-558	57-108
11	7767-9477	729	115-243
12	21395-27702	1919-2187	282-729
13	59049	5062-6561	609-1215

Látható, hogy elég kevés konkrét eredmény ismert. Az alábbi kérdés az egyik pontos eredményre kérdez rá.

Mutassuk meg, hogy a 13 mérkőzésből álló totón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

F 5.8 a) Az 1, 2, 3, . . . 16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Legalább hány kérdésre van szükség?

b) És ha a kérdéseket előre le kell írni, azaz a következő kérdés nem függhet az előzőre kapott választól?

F 5.9 Most is az 1, 2, 3, . . . 16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Kérdéseinket előre le kell írni és nincs befolyásunk arra, hogy a gondoló milyen sorrendben nézi és válaszolja meg azokat.[3] Hány kérdéssel tudjuk

[3] *Ezzel az „Előző válaszod igaz volt?" – típusú kérdéseket akarjuk kiszűrni. Tehát kérdés nem vonatkozhat a válaszok igazságtartalmára.*

biztosan kitalálni a gondolt számot, ha várhatóan egyszer (legfeljebb egyszer) téves választ kapunk?

F 5.10 (*Dienes Péter javaslata*)
Hanyag Hugó az 1, 2, 3, . . . 16 számok egyikére gondolt. Egy-egy cetlire kell fölírni kérdéseinket, mind odaadni neki, és majd amikor ráér, egyszerre mindegyikre válaszolni fog. De lehet rá számítani, hogy az egyik választ elveszti, mielőtt az eljutna hozzánk. Legalább hány kérdésre van így szükség ahhoz, hogy kitaláljuk a gondolt számot?

F 5.11 (*Juhász Istvántól és Szegedy Balázstól is hallottam*)

Egy kém az ellenséges ország televíziójánál dolgozik. Esténként alkalma van az adásba kerülő 8 x 8-as fekete fehér tábla egyetlen mezőjének színét megváltoztatni. Nem feltétlenül szükséges változtatnia. Sajnos sohasem tudja előre, hogy milyen mintázatú lesz a 64 mező, amikor eléje kerül. Hányféle információt tud így küldeni a TV-n keresztül?

Megoldások, megjegyzések

1. Mérlegelés

Ennek a fejezetnek a feladatai és megoldásaik a kódolás legalapvetőbb algebrai módszereit készítik elő. A különbség gyakran csak annyi, hogy míg a kódolás során valamely véges számhalmazban (pl. mod n) számolunk, addig itt valós számokkal dolgozunk.

1.1 Érdemes először csak az a), b) feladatrészeket kitűzni és a következő foglalkozáson visszatérni a c), d) kérdésekre.

1.1 a) Rakjunk föl a mérlegre mindegyik súlyból egyet-egyet, és nézzük meg, mennyivel tér el a tömeg $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ kg-tól.

1.1 b) Rakjunk a mérlegre az első szériából 1, a másodikból 2, . . ., a tizedikből 10 súlyt és nézzük meg, mennyivel tér el a tömeg $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 10$ kg-tól. Az eltérés és az előző mérésben kapott hiba hányadosa épp a hibás súlyok szériaszáma. Nem ez az egyetlen jó megoldás. Az a lényeg, hogy mindegyik szériából különböző számú súlyt tegyünk föl a mérlegre.

1.1 c) Ha n széria van, és az egyes szériákban a súlyok tervezett tömege rendre $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, de az egyik széria hibás, akkor $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, illetve $x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \ldots + n \cdot x_n$ lekérdezése megoldja a két feladatot.

1.1. d) I. megoldás Az 1.b)-ben adott mérés most is jó lesz. Ha pl. a 4. és 5. szériát felcseréljük, akkor a várt és a tényleges tömeg különbsége:

$$4 \cdot 4 + 5 \cdot 5$$
$$4 \cdot 5 + 5 \cdot 4$$
$$4 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 1.$$

1.1 d) II. megoldás Tegyünk fel, az elsőtől kezdve minden második szériából egyet-egyet a mérlegre! Az $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ összeget várjuk eredménynek. Ha volt csere, akkor nem ennyit kapunk.

d) Tanári kérdés: a fenti két megoldás között van-e olyan, amely akkor is jó, ha nem szomszédos ládákat cseréltek föl? És olyan, ami akkor is kimutatja a tévedést, ha nem volt csere, de az egyik széria hibás? (Az I. megoldás mindkettőre jó.)

1.2 I. megoldása (*Mindent háromszor*)

15 mérés elég. Sorra vesszük a szériákat, mindig csak egy súlyt veszünk ki belőlük és azt a súlyt háromszor is megmérjük. Így a jó eredményt mindegyik szériánál legalább kétszer is megkapja a cégvezető, így tudni fogja a helyes eredményeket.

Megjegyzés
Ez a módszer jó, de nem optimális.

1.2 II. megoldása (*Az I. megoldás javítása*)
Az előző módszert alkalmazom, de csak kétszer mérek meg minden súlyt, majd kizárólag azt teszem fel harmadszorra is, amelynél két külön-

böző eredményt kaptam. Így 11 méréssel oldom meg a feladatot.

Megjegyzés

Ez a módszer nem szabályos, mert nincs lehetősége a cégvezetőnek menet közben beleszólni, hogy melyiket mérje meg még egyszer az alkalmazott.

1.2 III. megoldása (*Újabb javítás*)

Én is csak kétszer mérek meg minden súlyt, végül pedig mindegyik szériából egyet-egyet tetetek fel a mérlegre, így 11 méréssel oldom meg a feladatot. Ha az egyesével mért súlyok egyikénél a két mérés nem ugyanazt az eredményt adta, akkor tudhatjuk, hogy az utolsó mérés jó, így annak eredményéből, és a másik négy súly tömegéből meghatározható a bizonytalan eredmény is.

1.2 IV. megoldása (*Párok*)

Elég 10 mérés is. Megméretek mindegyik szériából egy-egy súlyt külön-külön, majd megméretem az egymás melletti szériákból alkotott párokat, legvégül az 5. és az 1. széria egy-egy súlyából alkotott párt is. Az eredményeket értelem szerint m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{45}, m_{51}-gyel jelölöm. Vagy az egyik egyszériás mérési eredmény vagy az egyik pármérés eredménye hibás. Ennek megfelelően az $m_1 + m_2 = m_{12}$, $m_2 + m_3 = m_{23}$, $m_3 + m_4 = m_{34}$, $m_4 + m_5 = m_{45}$, $m_5 + m_1 = m_{51}$ összefüggések közül vagy kettő is rossz (amelyben a megfelelő m_i szerepel) vagy csak egy (amelynek jobb oldala a téves m_{ij}). Ebből rájöhetek, hol a hiba, és onnan már gyerekjáték meghatározni a helyes tömegeket.

1.2 V. megoldása (*Túljárnak a tanár eszén*)

Egy előadáson a tanár kérdésére az egyik ügyes diák az alábbi furfangos megoldást adta, amit ott az előadó helyesnek fogadott el.

7 méréssel oldom meg a feladatot. Az előző módszerhez hasonlóan leméretem a szomszédos szériákból álló párokat, de ezen kívül csak két mérést kérek, mindkétszer mindegyik szériából egyet-egyet tetetek a mérlegre. Az egyes mérési eredményeket m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{45}, m_{51}, m_{12345} és M_{12345} jelöli. Ha az utolsó két mérés eredménye különböző, akkor biztos köztük van a hiba. Ilyenkor az első öt mérés eredménye biztosan jó, így segítségükkel meghatározható mindegyik súly tömege.

Ha az utolsó két mérés eredménye azonos, akkor a súlyok össztömegét már biztosan tudjuk. Az első súly tömegét kétféleképpen is kiszámíthatjuk a mérési eredményekből:

$$m_1 = m_{12345} - m_{23} - m_{45} \text{ és } (2.1)$$

$$m_1 = m_{12} + m_{34} + m_{51} - m_{12345}.$$

Ha a két érték megegyezik, akkor az az első súly tömege. Ha különbözők, akkor könnyen kiválasztható, hogy a nagyobb vagy a kisebb-e a jó eredmény: ha $m_1 + m_{23} + m_{34} + m_{45} + m_{51}$ nagyobb, mint $2 \cdot m_{12345}$, akkor a hiba abból adódott, hogy az asszisztens egyszer túl nagy értéket adott meg, tehát most a kisebb érték a jó, ha pedig $m_{12} + m_{23} + m_{34} + m_{45} + m_{51}$ kisebb, mint $2 \cdot m_{12345}$, akkor – ugyanígy okoskodva – a nagyobb jó. A mérési terv ciklikus szimmetriája miatt a többi súly tömege is meghatározható ezen az elven.

Megjegyzés

Ez a szép megoldás, sajnos, hibás. A hiba megkeresése előtt lássunk egy példát!

Ha az első öt mérés mindegyikének eredményére 2 kg-ot ír be az asszisztens, az utolsó kettő mindegyikére pedig 5,1 kg-ot, akkor nem tudjuk meghatározni a súlyok tömegét. Ilyenkor ugyanis csak arra jöhetünk rá, hogy az első öt mérés egyikénél, de *bármelyikénél* áll a rossz eredmény, és a helyes 2,2 kg lenne. Ha ez pl. az első mérésnél van, akkor a súlyok tömege $m_1 = 1,1$; $m_2 = 1,1$; $m_3 = 0,9$; $m_4 = 1,1$; $m_5 = 0,9$. Ha egy másik mérésnél van a hiba, akkor ugyanezeket az értékeket kapjuk, de más elosztásban. Tehát nem határozható meg biztosan, hogy az egyes szériákban mekkora tömegű súlyok vannak.

A hiba egy csúsztatás. Az $m_{12} + m_{23} + m_{34} + m_{45} + m_{51}$ és $2 \cdot m_{12345}$ értéke közötti különb-

ségből ugyanis arra tudunk következtetni, hogy az egyik mérés eredménye, tehát az egyik *súlypár* tömege nagyobb (vagy kisebb) a megadottnál, nem arra, hogy az egyik *súly* tömege nagyobb (vagy kisebb) a rossz adatból kiszámíthatónál. Így a (2.1)-ben nem tudjuk, hogy a rossz adat kivonandóként vagy összeadandóként szerepel, ezért azt sem tudjuk, hogy az m_1-re kapott kisebb vagy nagyobb eredmény a jó.

1.2 VI. megoldása

Elég 7 mérés. Az első öt mérésben csak egy-egy súlyt teszünk a mérlegre, az elsőben az első, a másodikban a második, ... az ötödikben az ötödik szériából. A hatodik mérésben öt súlyt, mindegyik szériából egyet-egyet teszünk a mérlegre. A hetedik mérésben 15 súlyt, az első szériából egyet, a másodikból kettőt, ... az ötödikből ötöt teszünk a mérlegre. Ha a hatodik vagy a hetedik mérés eredménye összhangban van az első öt mérés eredményével, akkor az első öt mérés mindegyikének jó az eredménye, tudjuk a tömegeket. Ha a hatodik és a hetedik mérés eredménye sincs összhangban az első öt mérés eredményével, akkor az első öt között van a hiba. Most az 1.1 feladat a) és b) része megoldásának alapján készen vagyunk.

Hat mérés nem elég. Ennek igazolásához meg kell értenünk, hogy miképp lehet eldönteni egy mérési tervről, hogy jó-e vagy sem. A pontos bizonyításhoz gimnáziumi szinten nem feltétlenül kell ragaszkodni.

Egy mérési tervhez meg kell adni az előírt mérések számát – a továbbiakban ezt n jelöli – továbbá nemnegatív egész számokkal kell kitölteni az űrlap 1., 2., 3., 4., 5. oszlopait. Jelölje az így kapott számtáblázat i-edik sorának ($i = 1, 2, \ldots, n$) j-edik oszlopába ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) írt számot a_{ij} ($a_{ij} \in \mathbb{N}$).

I. lemma

A cégvezető pontosan akkor képes biztosan meghatározni a mérési űrlap segítségével a szériákban található súlyok tömegét azok tetszőleges (nemnegatív) értékei és az asszisztens tetszőleges (de legfeljebb egy) hibás adatközlése esetén, ha nem adhatók meg az $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ valós változók értékei úgy, hogy nem mindegyik 0 és az alábbi n egyenlet közül legfeljebb kettő kivételével mindegyik teljesül:

$$\begin{aligned} a_{11}\epsilon_1 + \epsilon_{12}\epsilon_2 + \epsilon_{13}\epsilon_3 + \epsilon_{14}\epsilon_4 + \epsilon_{15}\epsilon_5 &= 0, \\ \epsilon_{21}\epsilon_1 + \epsilon_{22}\epsilon_2 + \epsilon_{23}\epsilon_3 + \epsilon_{24}\epsilon_4 + \epsilon_{25}\epsilon_5 &= 0, \\ &\vdots \\ a_{n1}\epsilon_1 + a_{n2}\epsilon_2 + a_{n3}\epsilon_3 + a_{n4}\epsilon_4 + a_{n5}\epsilon_5 &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Az I. lemma bizonyítása

Ha az i-edik mérés eredményére az asszisztens a b_i számot írta be, akkor a cégvezető olyan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív számokat keres, amelyekre az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + a_{n5}x_5 &= b_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

egyenletek közül legfeljebb egy nem teljesül. Erre egy megoldást a szériákban található súlyok valódi tömegei adnak. Akkor nem tud dönteni a cégvezető, ha az (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) ($m_j > 0$) és az ettől különböző (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5) ($M_j > 0$) számötösre az

$$\begin{aligned} a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + a_{14}m_4 + a_{15}m_5 &= b_1, \\ a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 + a_{24}m_4 + a_{25}m_5 &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + a_{n3}m_3 + a_{n4}m_4 + a_{n5}m_5 &= b_n, \end{aligned} \tag{2.4}$$

egyenletek, illetve az

$$\begin{aligned} a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + a_{13}M_3 + a_{14}M_4 + a_{15}M_5 &= b_1, \\ a_{21}M_1 + a_{22}M_2 + a_{23}M_3 + a_{24}M_4 + a_{25}M_5 &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}M_1 + a_{n2}M_2 + a_{n3}M_3 + a_{n4}M_4 + a_{n5}M_5 &= b_n \end{aligned} \tag{2.5}$$

egyenletek közül legfeljebb egy-egy nem teljesül. Legyen

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = m_1 - M_1,\ \epsilon_2 = m_2 - M_2,\ \epsilon_3 = m_3 - M_3, \\ \epsilon_4 = m_4 - M_4,\ \epsilon_1 = m_5 - M_5 \end{aligned} \tag{2.6}$$

és vonjuk ki az egymásnak megfelelő (2.4)-beli és (2.5)-beli egyenleteket egymásból! Azt kapjuk, hogy az ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ϵ_4, ϵ_5 valós

számokra – melyeknek nem mindegyike 0 – az (2.2) egyenletek közül legfeljebb kettő nem teljesül.

Másrészt, legyenek ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ϵ_4, ϵ_5 olyan valós számok, amelyekre az (2.2) egyenletek közül legfeljebb kettő nem teljesül, pl.

$$a_{11}\epsilon_1 + a_{12}\epsilon_2 + a_{13}\epsilon_3 + a_{14}\epsilon_4 + a_{15}\epsilon_5 = B_1,$$

$$a_{21}\epsilon_1 + a_{22}\epsilon_2 + a_{23}\epsilon_3 + a_{24}\epsilon_4 + a_{25}\epsilon_5 = B_2,$$

$$a_{i1}\epsilon_1 + a_{i2}\epsilon_2 + a_{i3}\epsilon_3 + a_{i4}\epsilon_4 + a_{i5}\epsilon_5 = 0,$$

ha $2 < i \leq n$. Ha $m_1 > |\epsilon_1|$, $m_2 > |\epsilon_2|$, $m_3 > |\epsilon_3|$, $m_4 > |\epsilon_4|$, $m_5 > |\epsilon_5|$ tetszőleges számok, míg b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 értékeit a (2.4), M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 értékeit a (2.6) összefüggések definiálják, akkor a $b_1' = b_1 - B_1$, $b_2' = b_2$, $b_3' = b_3$, $b_4' = b_4$, $b_5' = b_5$ mérési eredmények esetén a cégvezető nem tud dönteni az $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$, $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ tömegeloszlások közül.

Az **I.** lemmát bebizonyítottuk.

Tegyük fel most, hogy hétnél kevesebb mérésünk van, azaz $n \leq 6$. Hagyjunk el a (2.2) egyenletrendszer egyenletei közül tetszőlegesen kettőt! Így kevesebb egyenletünk marad, mint ahány ismeretlen van az egyenletrendszerben. Az alább kimondott **II.** lemma szerint lesz megoldása az egyenletrendszernek, így az I. lemma következményeként adódik, hogy hétnél kevesebb méréssel nem oldható meg a feladat.

II. lemma

Ha egy homogén[1] lineáris egyenletrendszerben több ismeretlen van, mint ahány egyenlet, akkor az egyenletrendszernek van a triviálistól[2] különböző megoldása.

A II. lemma bizonyítása

Az egyenletek számára vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Ha nincs is egyenlet, akkor a változó(k) értéke tetszőleges lehet. Ha $k \geq 1$ egyenletből áll az egyenletrendszer és k-nál több ismeretlent tartalmaz, akkor egyik egyenletéből kifejezhetjük az egyik ismeretlent (a többi ismeretlen segítségével) és az így kapott kifejezést behelyettesíthetjük a többi egyenletbe. Így $(k - 1)$ egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, melyben az ismeretlenek száma több, mint $(k - 1)$. Az indukciós feltevés szerint ennek van nemtriviális megoldása, így az eredetinek is van.

A **II.** lemmát bizonyítottuk. Egyúttal az is igazolást nyert, hogy legalább hét mérést kell megadnia a cégvezetőnek, ha biztosan meg akarja tudni az egyes szériákban található súlyok tömegét. A bizonyításból az is kiderül, hét mérés akkor lesz megfelelő, ha úgy választjuk meg őket, hogy közülük bármelyik ötnek megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldása a triviális legyen.

Irodalom

[1] Fazakas Tünde és Hraskó András, Bergengóc példatár 2., *Typotex Kiadó*, 2001.

[2] Hraskó András és Szőnyi Tamás, Hibajavító kódok, az Új matematikai mozaik című kötet 139-170. oldalain, *Typotex Kiadó*, 2002.

[3] J. H. van Lint, The Mathematics of the Compact Disc, DMV Mitteilungen 4/98, 25-29.

[4] Compact disc digital audio, Philips technical review, Vol. 40, 1982, No. 6.

[5] H. Hämäläinen, I. Honkala, S. Lytsin, P. Östergøard, Football Pools – A Game for Mathematicians, American Math. Monthly, August-Sept 1995, 579-588.

[6] Györfi László, Győri Sándor és Vajda István, Információ és kódelmélet, *Typotex Kiadó*, 2000.

[7] Claude E. Shannon és Warren Weaver, A kommunikáció matematikai elmélete, Országos Műszaki Információs Központ és Könyvtár, 1986.

[8] Fritz József, Bevezetés az információelméletbe, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1971.

[9] Simon Singh, Kódkönyv, Park Könyvkiadó, 2000.

[1] *A „homogén" szó arra utal, hogy az egyenletrendszer szabad tagjai mind 0-k, úgy mint (2.2)ben.*

[2] *A homogén lineáris egyenletrendszer triviális megoldásának nevezzük azt a megoldást, amelyben minden ismeretlen értéke 0.*

Dienes Zoltán

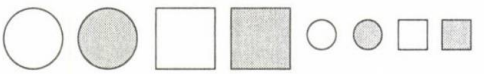
Játsszunk néhány matematikai ideával! II.

(A komplex számok játékos természete)

Hogyan lehet a játékot négy dimenzióra kiterjeszteni?

1. Vezessük be a nagyság változtatását is!

Mostantól fogva nem csak négy különböző egységgel fogunk játszani, hanem nyolccal. A kék és piros körök meg négyzetek ezután le-



hetnek vagy nagyok, vagy kicsik. Játékszereink ezek lesznek.

Egy nullapárnak a tárgyai egymástól csak színben különbözhetnek, alakjuk és méretük egyforma kell hogy legyen.

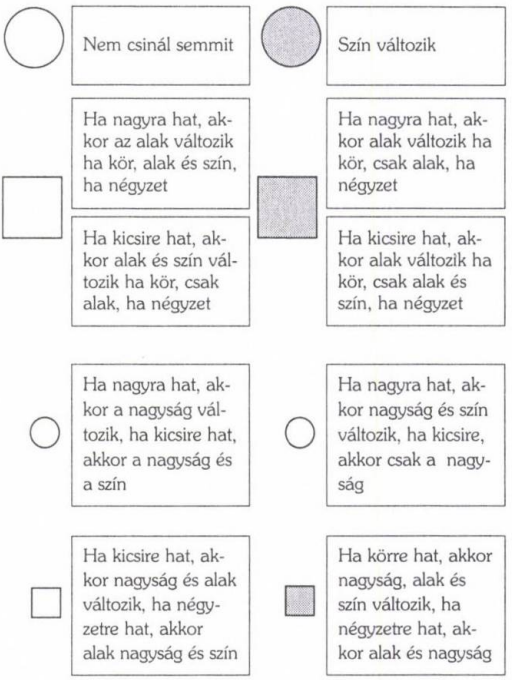
Az összeadás és a kivonás éppen úgy történik mint az előbb, itt is vigyázni kell, hogy ezeket a műveleteket a négy különböző alakkal egymástól függetlenül kell elvégezni.

Az első szorzás-szabályok

Amennyire csak lehet, maradjunk a „régi" szabályoknál, amelyeket addig használtunk, amíg a tárgyak nagysága nem különbözött. Azt is el kell határozni, hogy hogyan hat egy nagy tárgy egy másik nagy tárgyra vagy egy másik kis tárgyra. És természetesen azt is meg kell mondani, hogy mi lesz, amikor egy kicsi egy kicsire hat, illetve amikor egy kicsi egy nagyra hat.

Az olvasó most már talán le tudna írni nyolc szorzási szabályt, ha tekintetbe veszi a fentieket. Ha nem, akkor nézze meg javaslataimat!

Az alábbi szorzási szabályokat javaslom:
(Hogy a szorzó hogyan hat egy tárgyra, attól függ, hogy milyen tárgyról van szó)



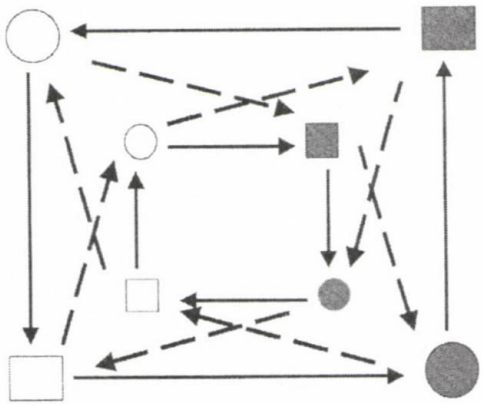
A nagy tárgyak ugyanúgy viselkednek, mint ahogy az eddigi kétdimenziós szabályok írták elő, csak akkor van egy kis eltérés, amikor egy nagy tárgy egy kis tárgyra „hat". Ha az olvasó jobb szabályokat tud kitalálni, nem is kell tovább olvasnia a cikket!

Később kevésbé bonyolult szabályokat is fogok javasolni, ha a fentiek nem tetszenek az

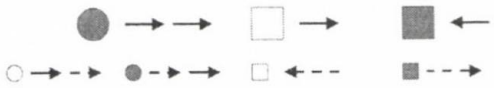
olvasónak. Ám egyelőre nézzük meg, ezekkel mit lehet csinálni!

2. Ábrázoljuk szorzóinkat!

Itt van egy érdekes ábra, ami könnyebbé teszi a szabályok elsajátítását:



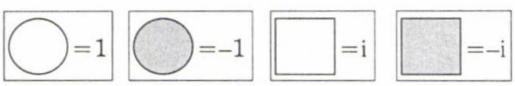
A két különböző nyíllal meg lehet határozni a hét nem-semleges szorzást a következőképpen:



Ezeket könnyen lehet az ábrán igazolni. Ha választunk egy tárgyat és az egyiket a nem-semleges szorzó-szabályok közül, akkor csak követni kell a választott szabályokhoz rendelt nyilat vagy nyilakat, minden esetben a szabályaink szerint megmondott tárgyhoz fogunk érkezni.

3. Egy pontos nyelv a négydimenziós játékok leírására

Ha csak nagy tárgyakat használunk, akkor azt csináljuk, amit az egyik kétdimenziós játékunkban csináltunk. Ezért talán jó volna ugyanolyan szimbólumokkal dolgozni, mint az előbb. Tehát egyezzünk meg, hogy a nagy tárgyakat így jelöljük:



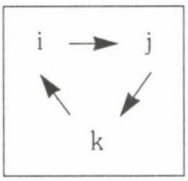
A kis tárgyakat pedig így jelölhetjük:

Az olvasó bizonyára már töpreng, hogy miért választottam a *j* és a *k* betűt. Ezt azért csináltam, mert akkor igazak lesznek a következő szorzások:

$$i \times j = k,\ j \times k = i,\ k \times i = j$$

$$j \times i = -k,\ k \times j = -i,\ i \times k = -j$$

amit könnyű észben tartani. Csak arra kell gondolni, hogy ebben a ciklusban



ha két betűt összeszorozunk egymással olyan sorrendben, mint ahogy a nyilak vannak rajzolva, akkor az eredmény éppen a harmadik betű. Ha pedig fordított sorrendben csináljuk a szorzást, akkor is a harmadik betűt kapjuk, de ekkor mínusz jellel ellátva!

Azt volna jó tudni, hogy vajon a nullának vannak-e nem-nulla tényezői. Ezt a problémát egy Frobéniusz nevű ember már megoldotta! Az egyszeregyünk akkor így néz ki:

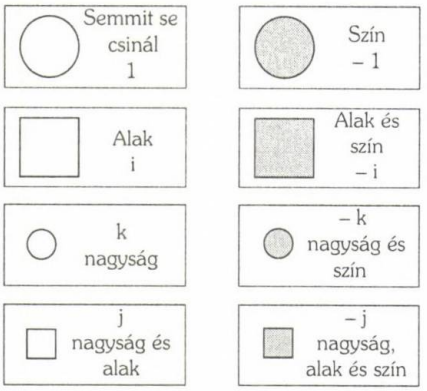
X	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	– 1	k	– j
j	j	– k	– 1	i
k	k	j	– i	– 1

és a szorzás a mínuszokkal követi a megszokott számolási szabályokat.

4. Egy másik négydimenziós játék

Itt egy másik mód arra, hogy a nyolc tárgy között szorzási szabályokat értelmezzünk. (A je-

lölt tulajdonságok a szabályokban annak a tulajdonságának a változtatását jelentik.)

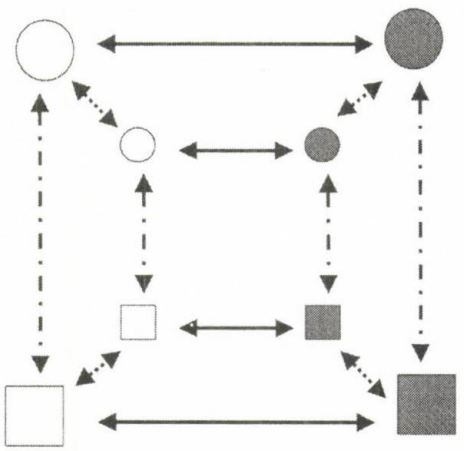


Ez elég könnyű játék, ám nem túl szórakoztató. Akármelyik szorzót kétszer egymás után használjuk, visszatérünk oda, ahol a dolgot elkezdtük. Nincsenek négyes ciklusok, nem lehet sok érdekes problémát találni.

Ezeknek a szabályoknak az egyszeregye így írható fel:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	j
j	j	k	1	i
k	k	j	i	1

E játék ábráját így lehet lerajzolni:



Világos, hogy a vízszintes nyilak színváltozást jelentenek.

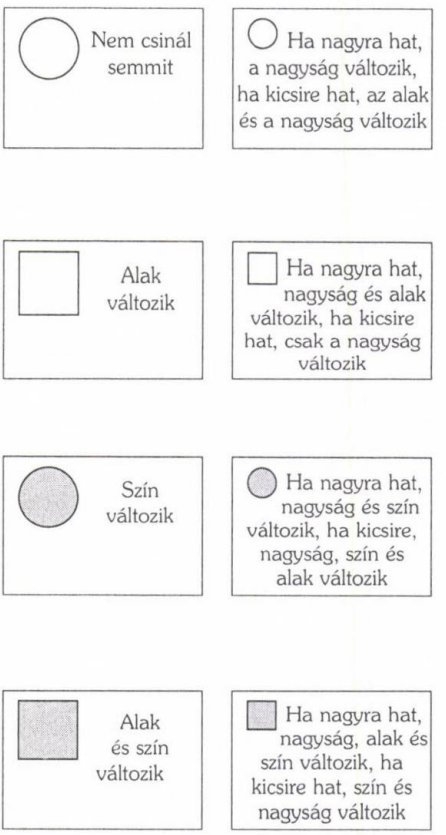
A függőleges nyilak alakváltozást, a ferde nyilak pedig nagyságváltozást jelentenek

4. Egy harmadik fajta négydimenziós játék

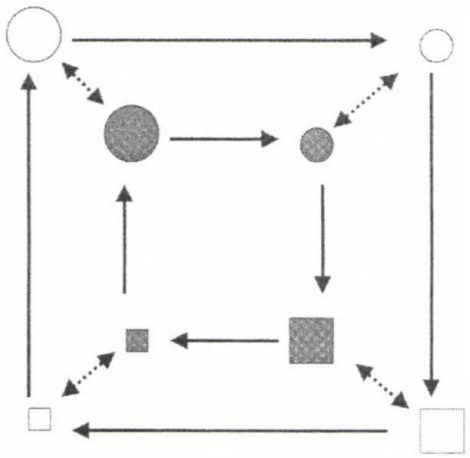
Ha a második játékot meguntuk, mert nem voltak benne négyes ciklusok, találjunk ki olyat, amiben vannak ilyenek. Ha lehetséges, a tényezők sorrendjének megfordítása ne változtassa meg a szorzatot. Első játékunkban láttuk, hogy

$$i \times j = k \quad \text{de} \quad j \times i = -k,$$

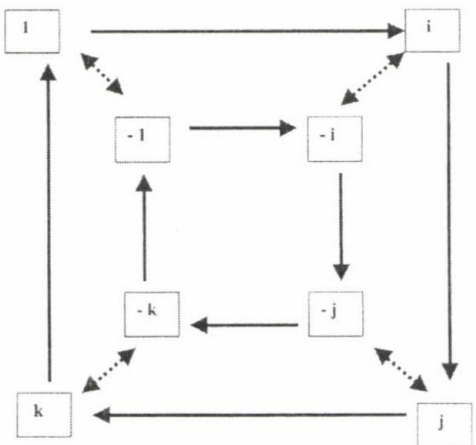
most próbáljuk úgy megfogalmazni a szabályokat, hogy a sorrend ne legyen fontos. Harmadik javaslatom a következő:



Ez a játék így ábrázolható:



Jelekkel:

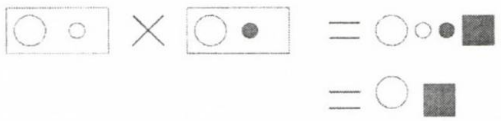


A játéknak egyszeregye pedig így írható fel:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	j	k	1
j	j	k	1	i
k	k	j	i	j

Nézzük meg, milyen lesz így a szorzások eredménye!

Például próbáljuk meg ezt a szorzást:



(egy nullapár eltávolítottam)

Betűkkel így jelölhető:

$$(1 + i) \times (1 - i) = 1 + i - i - j = 1 - j$$

Vagy nézzük meg ezt is:

Betűkkel így néz ki:

$$(1 + i) \times (1 + i) = 1 + i + i + j = 1 + 2\,xi + j$$

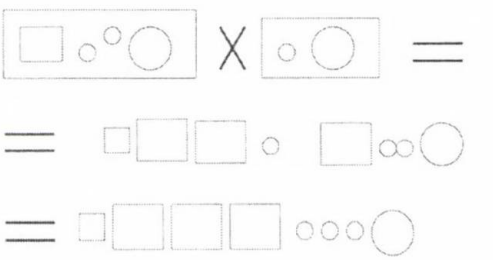
Legyünk egy kicsit merészebbek:

és miután két nullapárt elvittünk,

Betűkkel:

$$(1 + i + j) \times (1 - i) = 1 + i - j - i + j - k = 1 - k$$

Legyünk igazán merészek:



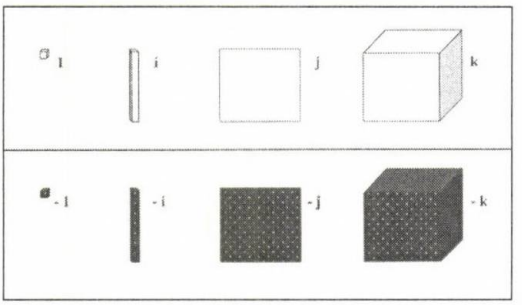
Betűkkel

$$(j + 2\,xi + 1) \times (i + 1) = k + 3\,xj + 3\,xi + 1$$

Ezek már ismert dolgok? Talán csak nem úgy vannak leírva, ahogyan megszoktuk?

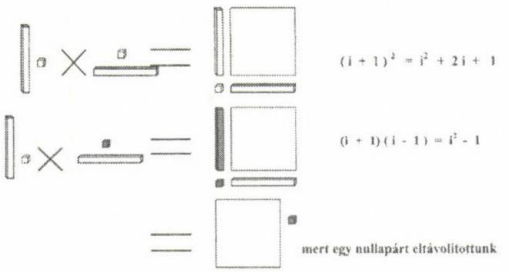
Változtassunk egy kicsit az íráson. Az egyszeregyből látható, hogy $i^2 = j$ és hogy $i^3 = k$

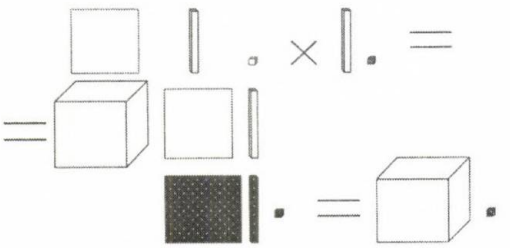
Ha mindig i-vel fejezünk ki mindent, akkor talán ismertnek fog látszani, amit írunk?
Még érdekesebb, ha ilyen kockákkal helyettesítjük a jeleket:



5. Mi történik, ha ezekkel a kockákkal játszunk? (polinómok)

Csináljunk néhány szorzást a kockákkal:





Az i- jelekkel így írható le:

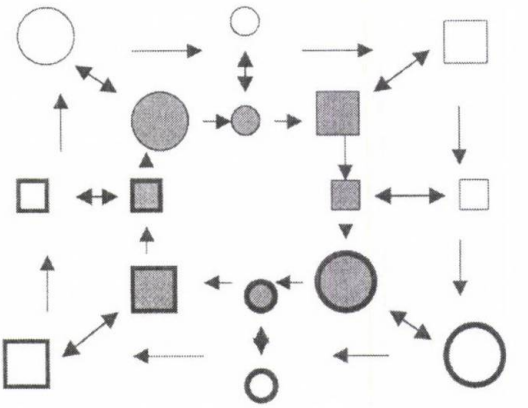
$$(i^2 + i + 1)(i - 1) = i^3 - 1,$$

mert két nullapárt eltávolítottunk.

Úgy látszik, hogy elértük a polinómokat! De nem egészen, mert a mi szabályaink szerint

$$i^4 = 1,$$

úgyhogy csak a harmadik hatványig tudunk eljutni a szabályaink szerint. Ám ez nem olyan nagy baj, a szabályokat meg lehet változtatni! Ne felejtsük el, hogy mi vagyunk az urak! Például tárgyaink vastagságát is be lehetne hozni, mint tulajdonságot. Akkor 8 különböző fajta tárgy helyett 16 különböző tárgyunk lesz! Egy nyolcas ciklust lehetne bevezetni, valahogy így:



Az már az olvasó feladata lesz, hogy kitalálja mindegyik „egység" szorzó-szabályát. A betűk lehetnének

$$1, i, j, k, p, q, r, s$$

amelyeket természetesen most is lehet majd így írni:

$$1, i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7.$$

így a hetedik hatványig el tudunk jutni.

Ha az összes polinóm kell, akkor mondjunk le a sok játékszerről és csak betűkkel és hatványjelekkel dolgozzunk. Akkor biztos mindenki el fogja hinni, hogy komoly matematikáról van szó, mert már rakásokkal nem játszadozunk. De remélhetőleg a rakás-játékok hozzásegítenek az „igazi" matematika megtanulásához és megértéséhez.

Ringler András

$A\sqrt{2}$

A négyzet területének geometriai többszörözése

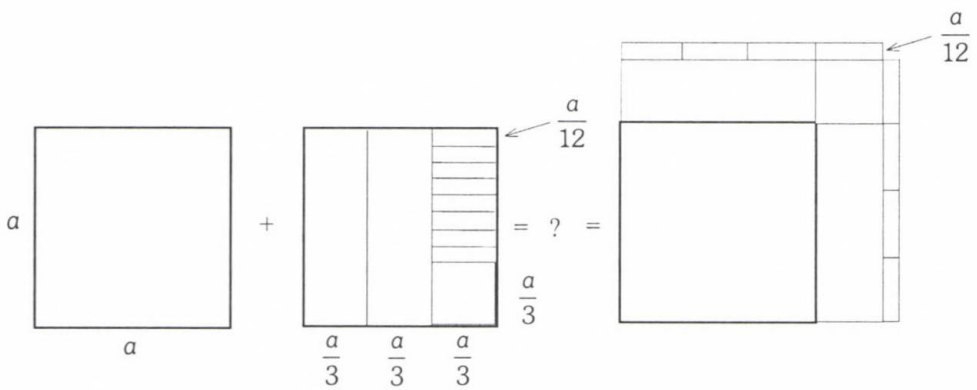
A matematikai gondolkodáshoz szükséges számlálási, számolási és számítási képességünk kialakulása nagyon hosszú fejlődés eredménye. Az ókori civilizációk életében is sok időnek kellett eltelnie ahhoz, hogy valaki a síkidomok területének kiszámolására, vagy pl. egy terület többszörözésére gondoljon. A bonyolultabb síkidomok területének kiszámolását – darabolásokkal – könnyen számolható területű idomokra vezették vissza [1], és talán a darabolt területek összeadása során merülhetett fel az ismert területű síkidomok területének megkétszerezésének (vagy felezésének) gondolata. Feladat formájában: Mekkora távolsággal kell megnövelni (vagy lecsökkenteni) egy „a" oldalú négyzet oldalát ahhoz, hogy kétszer akkora (vagy félszer akkora) területű négyzetet készíthessünk? Érdekes tény, hogy az aritmetikai műveletek sorában a kétszerezést is és a felezést is hosszú időn keresztül külön műveletnek tekintették; és a számolási technika fejlődésének eredményeként csak a XV. század végére törölték „őket" az önálló műveletek köréből.

Két „a" oldalú négyzet területének az összegét az egyik négyzet alkalmas szétdarabolásával és a darabolt részek másik négyzethez történő illesztésével állították elő (lásd az 1. ábrát!). Az így kapott sokszög területe nyilván $2 \cdot a^2$. Ebből a sokszögből úgy csináltak pl. egy négyzetet, hogy a felülre és a jobbra helyezett $\frac{a}{12}$ vastagságú kis téglalapok külső részeiről (a *2. ábrán* a szaggatott vonalak mentén) levágtak egy-egy x vastagságú vékony réteget; és a levágott részek

$$\frac{a}{3} \cdot x \cdot 8$$

összterületéből

$$\frac{a}{12} - x$$



1. ábra.
Darabolási vázlat egy „a" oldalú négyzet területének kétszeres területű sokszöggé alakításához

oldalhosszúságú,

$$\left(\frac{a}{12}-x\right)^2=\frac{a}{3}\cdot x\cdot 8$$

területű kis négyzetet „készítettek"; és az így kapott kis négyzettel kipótolták a „maradék sokszög" jobbfelső csúcsánál visszamaradt,

$$\frac{a}{12}-x$$

oldalhosszúságú „négyzet-lyukat". Így nyilvánvalóan egy

$$a+\frac{a}{3}+\frac{a}{12}-x$$

oldalhosszúságú „nagy négyzetet" állítottak elő, amelynek területe $2\cdot a^2$. Az elmondottak algebrai megvalósításához az

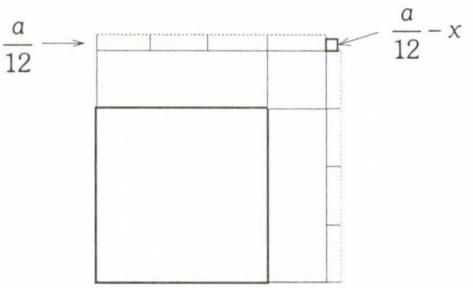
$$\left(\frac{a}{12}-x\right)^2=\frac{a}{3}\cdot x\cdot 8$$

egyenletet kell megoldani; a feladat geometriai megoldásához viszont – az előre megadott, tetszőleges „a" távolsághoz – körzővel és vonalzóval kell megtalálni a keresett „x" távolságot. Ez a feladat nem is olyan könnyű, de roppant érdekes. A geometriai megoldás végrehajtásához rendezzük egyenletünket a

$$\frac{17\cdot a}{6}\cdot x-x^2=\frac{a^2}{144}$$

alakba! Ezt az egyenletet a görögök így olvasták: ha a

$$\frac{17\cdot a}{6}$$



2. ábra
Vázlat a kétszeres területű sokszög „darabolással" történő négyzetté alakításához

távolsághoz x magasságú téglalapot illesztünk, és ha ezen téglalap

$$\frac{17\cdot a}{6}\cdot x$$

területéből levonjuk az ismeretlen x oldalhosszúságú négyzet x^2 területét; akkor egy

$$\frac{a}{12}$$

oldalhosszúságú,

$$\frac{a^2}{144}$$

területű négyzetet kapunk. A görögök matematikájában az x^2 terület levonásával, az ún. területhiánnyal történő illesztéseket (egyenlet megoldásokat) elliptikus illesztésnek (elliptikus megoldásnak) nevezték. Nagyon érdekes a tény, hogy a görögök a $c\cdot x-x^2=b^2$ alakú egyenleteket geometriailag, tehát körzővel és vonalzóval oldották meg ([2], [3]); a megoldhatóság feltétele:

$$\frac{c}{2}>b.$$

Az ilyen egyenletek megoldását, az ismeretlen „x" távolságot a „b" és a

$$\text{„}\frac{c}{2}\text{„}$$

távolságokból szerkesztett derékszögű háromszögről olvasták le (lásd a *3. ábrát*): a derékszögű háromszög szerkesztéssel adódó,

$$\frac{c}{2}-x$$

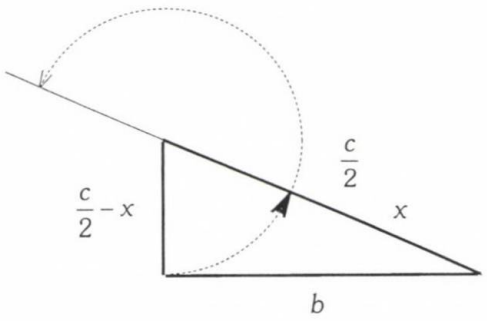
hosszúságú befogójának a

$$\frac{c}{2}$$

hosszúságú átfogóra történő átkörzésével, annak első elmetszésével adódik az elliptikus egyenlet első-, a második elmetszésével pedig a második megoldása. A *3. ábrán* az első megoldás nagysága az „x" távolsággal, a második megoldás pedig a

$$\frac{c}{2}+\left|\frac{c}{2}-x\right|$$

távolsággal egyezik meg. Érdemes megemlíteni, hogy a második megoldással a görögök nem tudtak mit kezdeni, pedig ennek a megoldásnak is könnyű geometriai jelentést adni (lásd a [2]-t!).



3. ábra
A $c \cdot x - x^2 = b^2$ alakú (elliptikus) egyenlet geometriai megoldását szemléltető vázlat; a derékszögű háromszög megszerkesztéséhez ismerni kell a „b" és a $\frac{c}{2}$ hosszúságú szakaszokat

$$\text{A } \frac{17 \cdot a}{6} \cdot x - x^2 = \frac{a^2}{144}$$

alakban megadott (elliptikus) egyenlet geometriai megoldásához a

$$\frac{17 \cdot a}{12}\left(\equiv \frac{c}{2}\right) \text{ és az } \frac{a}{12}(\equiv b)$$

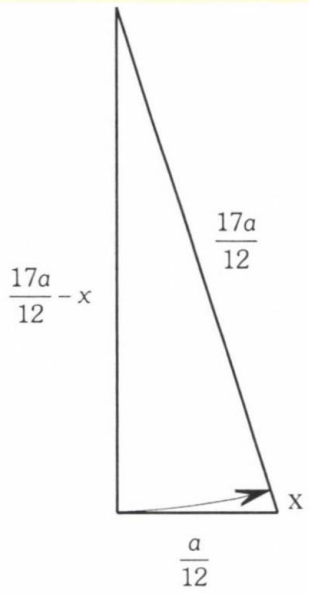
távolságok előállítása után – az elmondottakat követve – szerkesszük meg a *4. ábrán* látható derékszögű háromszöget; majd az átfogó előbb említett első elmetszésével „olvassuk le" a

$$\frac{17 \cdot a}{6} \cdot x - x^2 = \frac{a^2}{144}$$

alakban megadott egyenlet (első) megoldását. A *4. ábráról* „leolvasott" x távolság ismeretében már meghatározhatjuk a $2 \cdot a^2$ területű négyzet oldalának a hosszát; az

$$a + \frac{a}{3} + \frac{a}{12} - x$$

távolságot. A parányi x távolság körzővel és vonalzóval történő megszerkeszthetősége termé-



4. ábra

$$\text{A } \frac{17 \cdot a}{6} \cdot x - x^2 = \frac{a^2}{144}$$

alakú (elliptikus) egyenlet geometriai megoldását szemléltető vázlat (a

$$\frac{17 \cdot a}{6} \text{ és az } \frac{a}{12}$$

távolságok előre megszerkesztett távolságok). Figyelem, helykímélési okok miatt a 4. ábra nem méretarányos: a

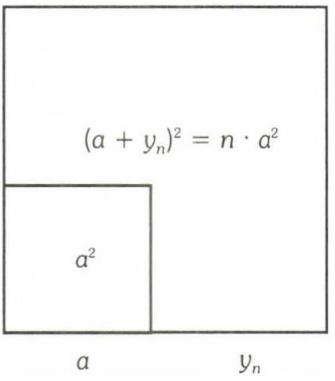
$$\frac{17 \cdot a}{6}$$

távolságnak az $\frac{a}{12}$ *távolságnál 17-szer kellene nagyobbnak lennie*

szetesen csak elvileg érdekes; a szokásos méretű szerkesztések során ugyanis a körzőt nem tudjuk ilyen pici távolságra „kinyitni".

A négyzet területének megkétszerezése kapcsán általánosabban is felvethető a feladat: Mekkora y_n távolsággal kell megnövelni egy „a" oldalú négyzet oldalának a hosszát, hogy n-szer nagyobb területű négyzetet kapjunk (5. ábra)? Természetesen fordítva is kérdezhetünk: Mekko-

ra távolságot vegyünk el az „a" oldal hosszából, hogy n-szer kisebb területű négyzetet szerkeszthessünk? Ha az előző kérdésre már válaszoltunk, akkor az utóbbi kérdésre adott válasz a negyedik arányos megszerkesztésével is megadható.



5. ábra
Vázlat a négyzet területének n-szerezéséhez

Az „a" oldalú négyzet területe n-szerezésének algebrai megoldásához nyilván az $(a + y_n)^2 = n \cdot a^2$ egyenletet kell megoldani. Mivel az ilyen egyenletek körzővel és vonalzóval történő megoldása sokkal érdekesebb az algebrai módszernél, ezért a geometriai megoldást mutatom be. A cél érdekében az előbbi egyenletet $2 \cdot a \cdot y_n + y_n^2 = (n-1) \cdot a^2$ alakba rendezem; és ezt oldom meg geometriailag. Az ilyen alakú egyenletet a görögök így olvasták: ha a $2 \cdot a$ távolsághoz y_n magasságú téglalapot illesztünk, és ha ezen téglalap $2 \cdot a \cdot y_n$ területéhez hozzáadjuk az ismeretlen y_n oldalú négyzet y_n^2 területét; akkor egy $\sqrt{n-1} \cdot a$ oldalhosszúságú, $(n-1) \cdot a^2$ területű négyzetet kapunk. A görögök matematikájában az y_n^2 terület hozzáadásával, az ún. területtöbblettel történő illesztéseket (egyenlet megoldásokat) hiperbolikus illesztésnek (hiperbolikus megoldásnak) nevezték. Nagyon érdekes a tény, hogy a görögök a $c \cdot x + x^2 = b^2$ alakú egyenleteket is geometriailag, tehát körzővel és vonalzóval oldották meg ([2]). Az ilyen egyenletek megoldását – az ismeretlen „x" távolságot – a „b" és a

„$\frac{c}{2}$"

távolságokból, mint befogókból szerkesztett derékszögű háromszögről olvasták le (lásd a *6. ábrát*): a

$$\frac{c}{2}$$

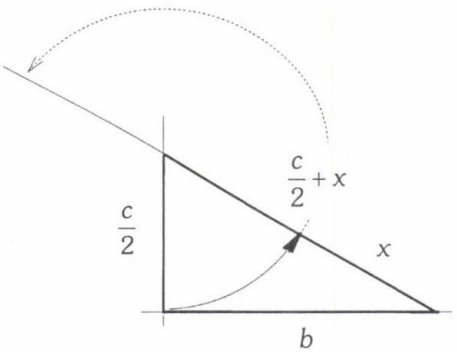
hosszúságú befogót a derékszögű háromszög szerkesztéssel adódó

$$\frac{c}{2} + x$$

hosszúságú átfogójára kell átkörözni, és az átfogó első elmetszésével adódik a hiperbolikus egyenlet első; a második elmetszésével pedig a második megoldása. A *6. ábrán* az első megoldás nagyságát az „x" távolság, a második megoldás nagyságát (abszolút értékét) pedig a

$$\frac{c}{2} + x + \frac{c}{2}$$

távolság mutatja. A második megoldással a görögök nem tudtak mit kezdeni, negatívsága miatt nem tudtak neki geometriai jelentést adni (bővebben lásd a [2]-t!).

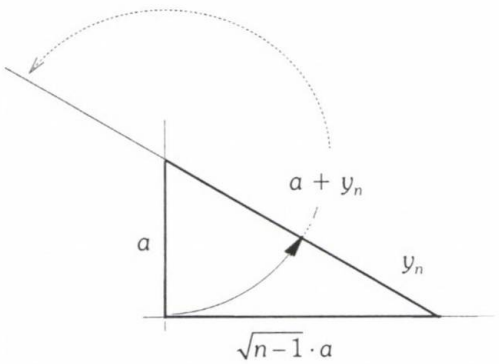


6. ábra
A $c \cdot x + x^2 = b^2$ alakú (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldását szemléltető vázlat; a derékszögű háromszög megszerkesztéséhez ismerni kell a „b" és a $\frac{c}{2}$ hosszúságú szakaszokat

A $2 \cdot a \cdot y_n + y_n^2 = (n-1) \cdot a^2 (\equiv b^2)$ alakban megadott (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldásához az

$$„a\left(\equiv \frac{c}{2}\right)”$$

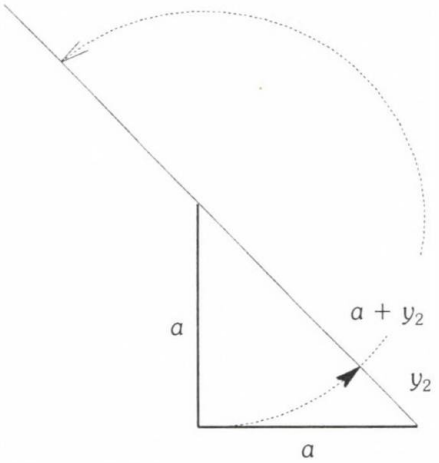
és a „$\sqrt{n-1} \cdot a\ (\equiv b)$” távolságok előállítása után – az elmondottakat követve – szerkesszük meg a *7. ábrán* látható derékszögű háromszöget; majd az átfogó előbb említett első elmetszésével olvassuk le a $2 \cdot a \cdot y_n + y_n^2 = (n-1) \cdot a^2$ alakú egyenlet (első) megoldását (a görögök a második megoldással nem tudtak mit kezdeni, lásd a [2]-t!).



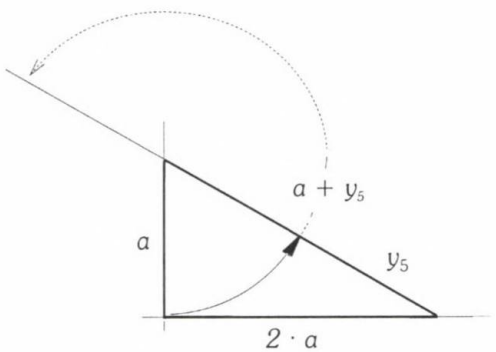
7. ábra
A $2 \cdot a \cdot y_n + y_n^2 = (n-1) \cdot a^2$ alakú (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldását szemléltető vázlat (a „$\sqrt{n-1} \cdot a$” távolság előre megszerkesztett távolság)

A $2 \cdot a \cdot y_n + y_n^2 = (n-1) \cdot a^2 (\equiv b^2)$ alakban megadott (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldása a mindenki által jól ismert végeredményre vezet; $n = 2$-re, illetve $n = 5$-re, ezt szemlélteti a *8.* és a *9. ábra.*

A *8. ábra* azt mutatja, hogy éppen az „a” oldalú négyzet átlójával lehet a $2 \cdot a^2$ területű négyzetet megszerkeszteni; a *9. ábra* pedig azt mutatja, hogy az 5-szörös területű négyzet előállításához szükséges oldalhossz éppen az „a” és a „$2 \cdot a$” befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója. Könnyű belátni, hogy az „n”

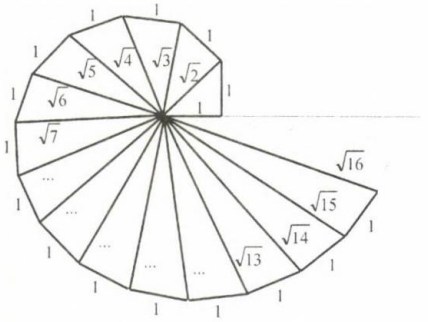


8. ábra
A $2 \cdot a \cdot y_2 + y_2^2 = a^2$ alakú (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldását szemléltető vázlat. Látható, hogy a kétszeres területű négyzet oldalának „$a + y_2$” hossza éppen az „a” oldalú négyzet átlójával egyezik meg; hossza tehát „$\sqrt{2} \cdot a$”



9. ábra
A $2 \cdot a \cdot y_5 + y_5^2 = 4 \cdot a^2$ alakú (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldását szemléltető vázlat. Látható, hogy az 5-szörös területű négyzet oldalának hosszát az „a” és a „$2 \cdot a$” hosszúságú befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója „adja” (ezt az algebrai megoldásból már előre is tudhatjuk; a „$\sqrt{5} \cdot a$” hosszúságú oldallal szerkesztett négyzet területe tehát tényleg 5-ször nagyobb, mint a kiindulási négyzet területe)

szám növelésével nyerhető eredményeket legjobban az általam „irracionális csigának" nevezett ábra foglalja össze: a *10. ábrán* látható „irracionális csiga" – $a \equiv 1$ oldalhosszra az „n" növelésével nyerhető – irracionális számok megszerkesztési lehetőségét mutatja.



10. ábra
Az „irracionális csiga" egymáshoz fűzött derékszögű háromszögekből áll; számos irracionális szám gyors megszerkesztéséhez ad információt

Az irracionális számok felfedezése a szektákba tömörült pithagóreusok legnagyobb eredménye volt: ez a felfedezés vezetett el az általuk kidolgozott számmisztika csődjéhez. Az euklideszi algoritmus használata közben merült fel a kérdés, vajon milyen arány van a négyzet átlója és az oldala között. A kérdésre adott válasz okozta a matematika első nagy válságát; a $\sqrt{2}$ felfedezése forradalmi változásokat idézett elő a matematikában; a pithagóreusok akkor még nem sejtették, nem is sejthették, hogy a $\sqrt{2}$ felfedezése új kapukat nyit majd a matematikai gondolkodás számára. A $\sqrt{2}$ szám léte sokk-ként érte a pithagóreusokat: társukat, aki a $\sqrt{2}$-vel kapcsolatos „titkot" feltárta, a tengerbe fojtották. A filozófia azonnal készen állt: „Úgy kell neki, miért találta meg! Miért zavarta meg a kozmosz rendjét, harmóniáját! Megérdemli a sorsát, hiszen felfedezésével „csúfot" hozott az addig harmonikusnak gondolt világra; összezavarta a dolgok biztos rendjét."

A szám misztika létrehozása is a pithagóreusok munkásságához kötődik: egy a lényeg száma, az első férfi szám; minden ebből származik. A belőle elsőként származó kettő, az első női szám; az eggyel történő szembeszegülés, a másság, az ellentmondás száma. A hármas az első igazi férfi szám, a harmónia jelképe, hiszen az egység és a különbözőség összegéből tevődik össze. A négy az igazság száma, hiszen a különbözőség, az ellentmondás számának önmagával való szorzatából kapjuk. Az öt (a 3 + 2 = 5 miatt) a férfi-nő kapcsolat, a házasság jelképe lett. A hat képviselte a tökéletességet, a hat az első tökéletes szám: előáll osztóinak összegeként (1 + 2 + 3 = 6). A hetet szent számnak tekintették, még kimondani sem volt szabad, helyette célszerű volt 4 + 3-at mondani. Mivel Isten hat nap alatt teremtette meg a világot, a hat a teremtést szimbolizáló szám lett; a tökéletes teremtésé. Bizonyos nézetek szerint a világ bajai azzal kezdődtek, hogy Noé bárkájából nem hatan, hanem nyolcan kezdték újjáépíteni a világot; a nyolc pedig hiányos szám: 1 + 2 + 4 < 8. A kilenc nagyon érdekes szám, hiszen a 3, tehát az első igazi férfi szám önmagával való szorzataként áll elő. A pithagóreusok legszentebb száma a 10-es, amely a teljesség száma: ez ugyanis a világot alkotó négy gyökér számnak az összege: 10 = 1 + 2 + 3 + 4 (tetraktüsz); a tíz tehát előáll az egység, a nő, a férfi és az igazság összegeként. A tíz fontosságát azzal is hangsúlyozták, hogy tíz ellentétpárt különböztettek meg: páros-páratlan, jobbal, egyenes-görbe, határos-határtalan, férfi-nő, fény-sötétség, egy-sok, nyugalom-mozgás, jórossz, négyzet-téglalap. Érdekesnek találták, hogy a tízen belül a prímek és az összetett számok száma azonos (4-4). A pithagóreusok szerint tíz „bolygónak" kell lennie, és mivel csak kilenc – „mozgónak gondolt" – megfigyelhető égitestet ismertek, ezért feltételezték, hogy a tizedik „mozgó égitest" az ellenföld, az ún. Vulgánusz. Szerintük a lónak tíz fogának kell lennie, és erről vitatkoztak, ahelyett, hogy megnézték volna.

A pithagóraszi szemlélet középpontjában a szám állt, szerintük a világban felismerhető harmóniák mögött számok vannak; ezért a világ lényege a szám. Érdekes dolog, hogy Pythagorasz ismerte fel először, hogy a hárfa megpendített húrjai hosszainak aránya és az előállt han-

gok magasságai között valamilyen matematikai összefüggés van. A hangok közötti harmóniák vizsgálatakor felismerte az oktáv, a kvint és a kvart viszonyban lévő hangok húrhosszal kifejezhető arányait. Így a hangokat is számokra vezette vissza: felismerte, hogy a kovács kalapácsának hangja és a kalapács mérete (tömege) között jól felismerhető számszerű kapcsolat van. Ő a matematikai fizika megalapítója, ő az első akusztikus: szerinte a zene ismerete nagyon fontos, segít felismerni a világban (a kozmoszban) lévő harmóniákat. A hárfa húrja (a kánon) rezgéseinek tanulmányozásakor megfigyelte, hogy az oktávnak, a kvintnek és a kvartnak nevezett zenei arányok kifejezhetők a húr 12 részre történő felosztásával kapott húrhosszak arányaival: az oktáv az 1 : 2, a kvint a 2 : 3, a kvart pedig a 3 : 4 húrhossz arányokkal jellemezhető.

A $\sqrt{2}$ irracionálisságának igazolása megvalósítható geometriai vagy algebrai úton is, ezeket a bizonyításokat még ma is matematikai „gyöngyszemeknek" tekintjük. A pithagóreusok értetlenül álltak e bizonyítások eredményei előtt, megdöbbentette őket a tény: a $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként. Az ilyen szám $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$ (illogikus), vagyis irracionális. Meggyőződésük szerint az $\alpha\lambda o\gamma o\sigma$-nak tekintett szám a világ szégyene. Az ilyen számok létezéséről hallgatni kell, vagy az egész problémát át kell tolni a geometria birodalmába (Eudoxosz); kimondván, hogy nem a számok az irracionálisak, hanem a mennyiségek; a szakaszok és a területek. Arisztotelész odáig jutott, hogy megtiltotta az aritmetika geometrián belüli használatát. Attól félt, hogy az aritmetika össze fogja zavarni a geometriában uralkodó harmóniákat is. A görögök az aritmetika és a geometria elválasztásával a geometriát egyre jobban megszerették, ezért ez lett a „főtudomány". Ezt igazolja a platóni Akadémia bejárata fölötti híres gondolat is: „Ne lépjen be ide senki, ha nem ismeri a geometriát."

Természetesen egy „a" oldalú négyzet területkétszerezése elképzelhető az előbbiektől eltérő módon is. Legegyszerűbbnek talán az tűnik, ha a négyzet területének a kétszerezését egy vele azonos területű téglalap kétszerezésére vezetjük vissza. Olyan téglalapot könnyű találni, amelynek „b" és „c" oldalaival teljesül az $a^2 = b \cdot c$ viszony. Mivel ez az egyenlőség azt „mondja", hogy az „a" oldal mértani közepe a „b" és a „c" oldalaknak; ezért, ha a „b" és a „c" oldalak közül egyet ismerünk, akkor az $a^2 = b \cdot c$ összefüggést kielégítő ismeretlen másik oldal körzővel és vonalzóval könnyen megszerkeszthető (például a magasság-tétellel). Ha találtunk megfelelő „b" és „c" távolságokat, akkor a „b" vagy a „c" oldalak valamelyikének a kétszerezésével kapott „$2 \cdot b \cdot c$" területhez már könnyű megtalálni a keresett, kétszeres területű négyzet „x" oldalát. A magasság-tétel ismételt alkalmazásával – az összefüggés miatt – az ismeretlen „x" mértani közép megszerkeszthető pl. a „$2 \cdot b$" és a „c" távolságokból: a szerkesztésből értelemszerűen $x = \sqrt{2} \cdot a$ távolság adódik.

Az óbabiloni birodalom gondolkodói a másodfokú egyenletekre vezető feladatokat nem geometriailag, hanem algebrailag oldották meg; a gyökvonáshoz alkalmazott ősi algoritmusukat például még ma is, nap mint nap használjuk [4]. A dolgozatomban bemutatott „görög" módszer felidézésével az a célom, hogy tanulságos példákat mutassak a másodfokú egyenletek precíz – még a legszigorúbb görög gondolkodók elvárásainak is megfelelő – geometriai megoldására. A mára már teljesen elfelejtett gondolkodási mód és módszer felidézésekor nem győzök eleget csodálkozni azon, hogy milyen szépen „kapjuk" vissza azokat az eredményeket; amelyeket a sokkal kényelmesebb, de a görögök szerint nem eléggé precíz algebrai módszer alkalmazásával szinte mindenki azonnal tud. Természetesen ennek így is kell lennie!

Irodalom

[1] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete, Akadémiai Kiadó, ISBN 963 05 7651 2.

[2] Ringler András: Másodfokú egyenletek megoldása, 2002, POLYGON, XI. kötet 2. szám, 60-65.

[3] Filep László: A tudományok királynője, 1997, TYPOTEX Kft. – Budapest, Bessenyei Kiadó – Nyíregyháza, ISBN 963 7546 83 9.

[4] Klukovits Lajos: Négyzetgyökvonás, másodfokú egyenletek az óbabiloni birodalom idején, 2003, POLYGON, megjelenés alatt.

Csorba Ferenc

Szerkesszük újra!

A 2002. évi Rátz László Vándorgyűlésen elhangzott előadás vázlatát próbálom meg több barátom biztatására – közreadni. Nyilvánvaló számomra (is), hogy nem tudom úgy leírni, ahogy azt akkor elmondtam, de talán sikerül valamit visszaadni belőle, s talán kiegészítve és jobban részletezve szakköri foglalkozásokon használható feladatokat kap az olvasó. Az alapötlet Katz Sándor bonyhádi kollégámtól származik. Ő az egyik nagykanizsai „Új utak és lehetőségek a ..." konferencián mondta el többek között a 7. feladatot a következőképpen: Az ABC C-ben derékszögű háromszögbe KLM szabályos háromszöget szerkesztettünk úgy, hogy KL párhuzamos AB-vel. Megjelöltük az A, M és a B pontokat. Letörölték a táblát, s csak ez a három pont maradt fenn. Szerkesszük újra (Oláh György barátom után szabadon) az eredeti ABC háromszöget! Az előadáson az alábbi, zömében közismert szerkesztési feladatokkal foglalkoztam:

1. Szerkesszünk sokszöget, ha ismertek oldalfelező pontjai.

2. Szerkesszünk háromszöget, ha ismertek szögfelezőinek a köré írt körrel való (csúcsoktól különböző) metszéspontjai.

3. Szerkesszünk háromszöget, ha adottak köré írt körének a magasságvonalakkal alkotott metszéspontjai.

4. Szerkesszünk háromszöget, ha adottak súlyvonalainak és a köré írható körnek a metszéspontjai.

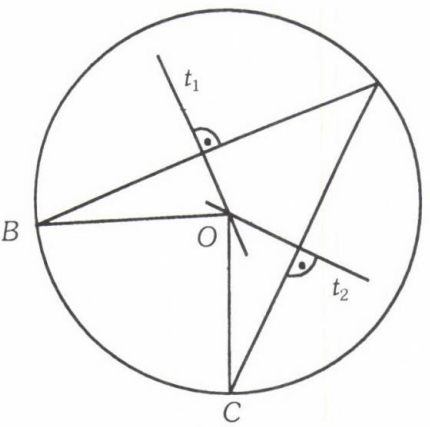
5. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az a három pont, amelyben az egy csúcsból induló szögfelező, magasság- és súlyvonal a háromszög köré írt kört metszi.

6. Szerkesszük meg a hegyesszögű háromszöget, ha adott talpponti háromszöge.

7. Az ABC C-ben derékszögű háromszögbe KLM szabályos háromszöget írtunk úgy, hogy KL párhuzamos AB-vel. Megjelöltük az A, M és a B pontokat. Valaki letörölte a táblát, csak ez a három pont maradt fenn. Szerkesszük újra az ABC derékszögű háromszöget.

8. Szerkesszünk négyzetet, ha adott oldal egyeneseinek egy-egy pontja.

A felhasznált fogalmak és tételek a későbbiek során kiderülnek. Csupán a tengelyes tükrözést és tulajdonságait emeltem ki. Legfeljebb három tengelyes tükrözés segítségével előállíthatók a sík egybevágósági transzformációi. Itt csak két, egymást metsző egyenesre történő tükrözés egymásutánjával foglalkoztam. Ez helyettesíthető a két egyenes metszéspontja körüli 2α szögű elforgatással, ahol α a két egyenes által bezárt szög. Ennek segítségével könnyen megmutatható a kerületi és középponti szögek közötti összefüggés. Most is, és a továbbiakban is csak a megoldások vázlatát írom le.



Rögzítsük az O középpontú körön a B és a C pontokat, majd vegyük fel a tetszőleges A pontot. (Az egyszerűség kedvéért legyen a BOC szög kisebb 180°-nál, így az A-nál lévő szög he-

gyesszög lesz.) Tekintsük az AB és az AC szakaszok t_1 és t_2 felezőmerőlegeseit. Ezek átmennek a kör O középpontján. Tükrözzük a B pontot rendre ezekre az egyenesekre. Így az A, majd a C pontba jutunk. Ez a két tükrözés helyettesíthető egy O pont körüli elforgatással, az elforgatás szöge a két egyenes által bezárt szög kétszerese. Ez pedig 2α , mert t_1 merőleges AB-re, t_2 pedig AC-re. Ezzel beláttuk, hogy a BOC középponti szög kétszerese a – tetszőlegesen választott – BAC kerületi szögnek. Ezek után nézzük a kitűzött feladatokat!

1. feladat: *a)* (Érdemes először háromszöggel kezdeni.) Adottak az ABC háromszög A_1, B_1, C_1 oldalfelező pontjai. Szerkesszük meg a háromszöget!

Megoldás: Húzzunk párhuzamosakat az A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 szakaszokkal rendre a C_1, A_1, B_1 pontokon keresztül. Ezek metszéspontjai adják az ABC háromszög csúcspontjait. (Természetesen kapunk még jó néhány megoldást a diákjainktól is.) Ha adott három, nem egy egyenesre illeszkedő pont, akkor ezekből mindig szerkeszthető a háromszög (a három szakaszfelező pont nem lehet egy egyenesen).

b) Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget az A_1,B_1,C_1,D_1 oldalfelező pontjaiból.

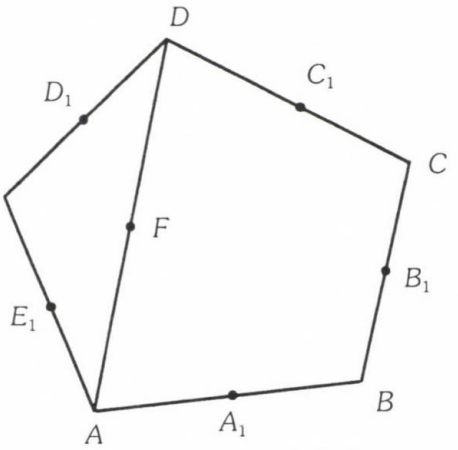
Megoldás: Könnyen belátható, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög paralelogramma. Ez az újraszerkesztés szükséges feltétele, de nem egyértelmű a rekonstrukció.

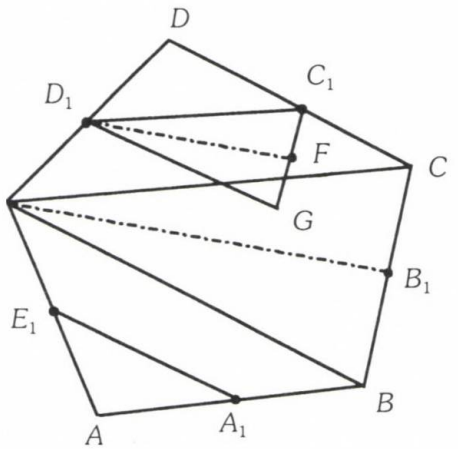
Megjegyzések: 1. A kapott eredmény akkor is igaz, ha az $ABCD$ négyszög torz négyszög. 2. Az újraszerkesztés nem egyértelmű, ezért kicsit meglepő az idei Szőkefalvi Nagy Gyula verseny egyik feladata: Szerkesszünk négyszöget, ha ismert három, egyenlő hosszú oldalának felezőpontja.

c) Adottak az $ABCDE$ ötszög A_1,B_1,C_1,D_1,E_1 oldalfelező pontjai. Szerkesszük meg az ötszöget.

Megoldás

I. „Húzzunk be egy egyenest!" Talán a legegyszerűbb megoldás, mégis nehezen jut eszünkbe. Az $ABCD$ négyszög AD oldalának F felezőpontját megszerkeszthetjük, ugyanis az előzőek alapján $A_1B_1C_1F$ paralelogramma. Így már szerkeszthető az AED háromszög. Az A pontot az oldalfelező pontokra tükrözve megkapjuk az eredeti ötszöget.





II. C_1 D_1 középvonal az ECD, E_1A_1 pedig az ABE háromszögben. Húzzunk párhuzamost D_1-en át E_1 A_1 -gyel. Erre az egyenesre E_1A_1-et az ábrának megfelelően felmérve kapjuk G-t. A D_1C_1G háromszög hasonló az ECB háromszöghöz. GC_1 felezőpontja legyen F. D_1F párhuzamos EB_1-gyel és $2 \cdot D_1F = EB_1$. Az elmondottakból már következik a szerkesztés menete.

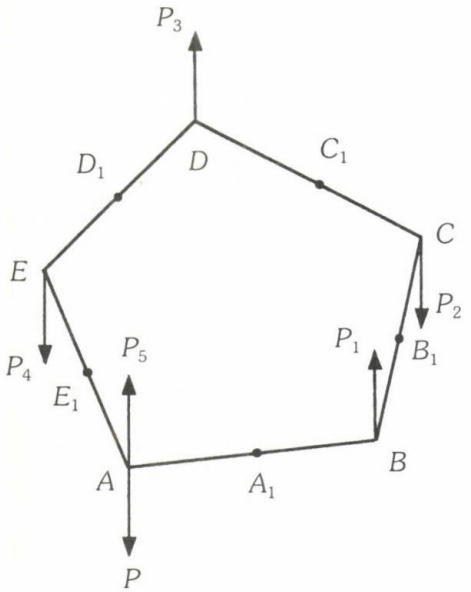
III. A sík tetszőleges O pontjából a csúcsba mutató vektorok legyenek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ és $\boldsymbol{e}$, az oldalfelező pontokba mutató vektorok pedig a_1, b_1, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{d_1}$, $\boldsymbol{e_1}$. Ez utóbbiak ismeretében kell előállítanunk pl. a-t.

$$\boldsymbol{2a_1 = a + b},\ \boldsymbol{2b_1 = b + c},\ \boldsymbol{2c_1 = c + d},$$
$$\boldsymbol{2d_1 = d + e},\ \boldsymbol{2e_1 = e + a},\ \text{ezekből}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{e}_1.$$

$OA = \mathbf{a}$ ismeretében szerkeszthető A, majd ezt az ismert felezőpontokra tükrözve megkapjuk az ötszöget.

IV. Tekintsük a sík tetszőleges P pontját, s tükrözzük az A_1 pontra, képét a B_1 pontra és így tovább, eljutunk a P_5 pontig. A pontra vonatkozó tükrözés tulajdonságai miatt a PP_5 szakasz felezőpontja lesz A.



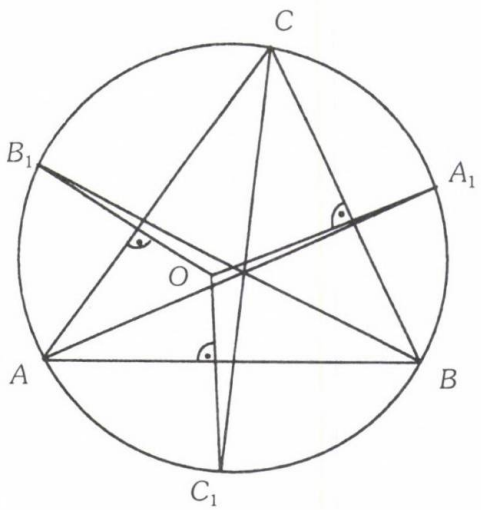
A III. és a IV. megoldásból megkaphatjuk az általános eset megoldását és a megoldhatóság feltételét is.

A továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – hegyesszögű háromszögekről lesz szó. A megoldások többsége általános háromszögekre is igaz, ezek meggondolását az olvasóra bízom.

2. feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha ismertek szögfelezőinek a köré írt körrel való metszéspontjai.

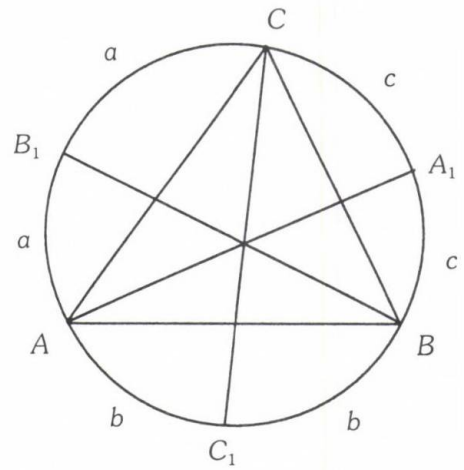
Megoldás:

I. A szögfelező és a szemköztes oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írt körön metszik egymást. Az A_1, B_1, C_1 pontok segítségével szerkeszthető az ABC háromszög köré írható kör O középpontja, így az OA_1, OB_1, OC_1 félegyenesek adottak. Állítsunk merőlegest mindegyikre egy tetszőleges, O-tól különböző pontjában.

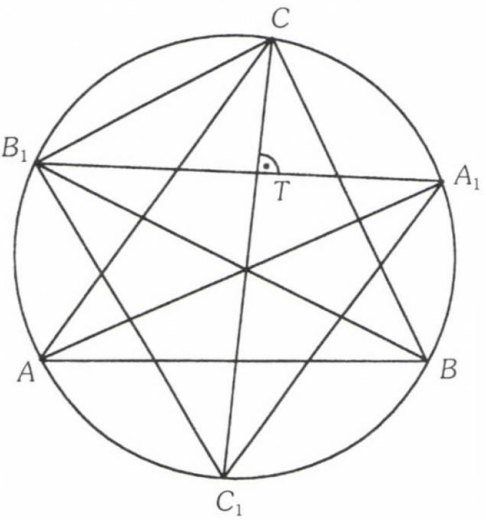


Ezek metszéspontjai meghatároznak egy, az ABC háromszöghöz hasonló $A_2B_2C_2$ háromszöget. Az $A_2B_2C_2$ háromszög köré írt kör középpontja legyen O_2. Egy O_2O eltolással és O középpontú hasonlósági transzformációval az $A_2B_2C_2$ háromszögből megkapjuk a keresett ABC háromszöget.

II. $AB_1 = B_1C := a$, $BC_1 = C_1A := b$, $CA_1 = A_1B := c$./a, b, c a körív hosszát jelöli. Ismert



$a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$, pedig a kör félkerülete. Így megszerkeszthetőek az a, b, c ívek, illetve a hozzájuk tartozó húrok, ezekből pedig a keresett ABC háromszög.



III. Bebizonyítjuk, hogy az ABC háromszög szögfelezői az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságvonalai. A háromszög szögei legyenek α, β, γ, az A_1B_1 és a CC_1 egyenesek metszéspontja T. Elegendő megmutatni, hogy a B_1TC háromszög derékszögű. A kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján

$$CB_1A_1\sphericalangle = CAA_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2},$$

$$B_1CA\sphericalangle = B_1BA\sphericalangle = \frac{\beta}{2},\ ACC_1\sphericalangle = \frac{\gamma}{2},$$

ezekből már következik, hogy a B_1TC háromszög T-ben derékszögű. Ezzel állításunkat igazoltuk, a szerkesztés menete ebből már következik.

3. feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha adottak köré írt körének a magasságvonalakkal alkotott metszéspontjai.

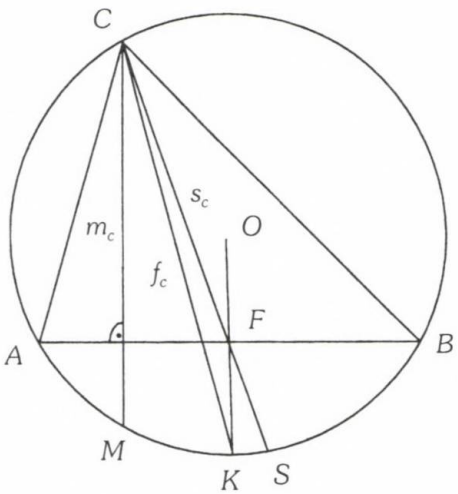
Megoldás: A feladat lényegében azonos az előzővel.

4. feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha adottak súlyvonalainak és a köré írható körnek a metszéspontjai.

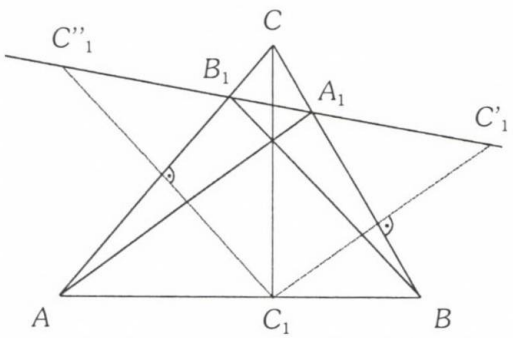
Megoldás: Csak „hallomásból" tudom, hogy létezik megoldás (sőt, általánosítva), sajnos nekem eddig nem sikerült megtalálnom, kíváncsian várom!

5. feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha adott az a három pont (M, K, S), amelyben az egy csúcsból induló szögfelező, magasság- és súlyvonal a háromszög köré írt kört metszi.

Megoldás: Legyen $AC<CB$, ekkor az ábrán látható sorrend lép fel az adott pontok között. (Ha $AC=CB$, akkor a három egyenes egybeesik, végtelen sok megoldás van.) A szerkesztés menete: M-en át párhuzamost húzunk OK-val, ez kimetszi C-t. C-t $CS \cap OK = F$, F-ből merőlegest állítunk OK-ra, ez az egyenes a körből kimetszi A-t és B-t. (O az ABC háromszög köré írható kör középpontja, F az AB szakasz felezőpontja.)



6. feladat: Szerkesszük meg a hegyesszögű háromszöget, ha adott a talpponti háromszöge.

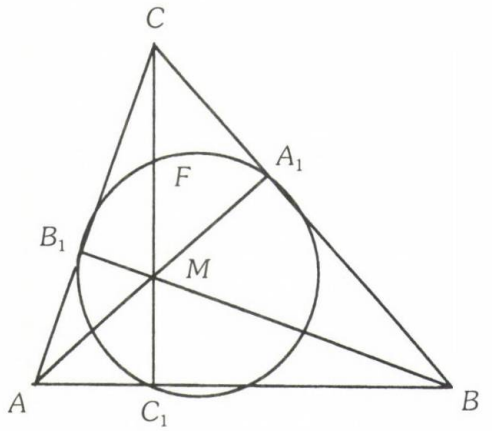


Megoldás:

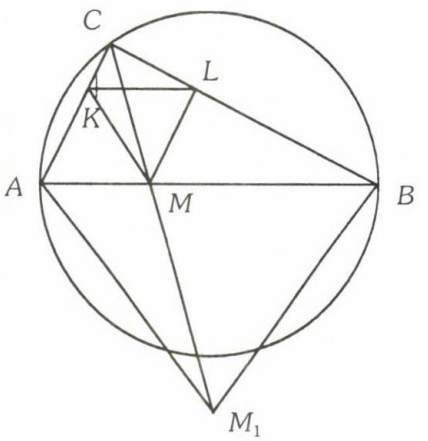
a) Az ABC hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb. (Fagnano-féle feladat.) Ennek bizonyítása több helyen megtalálható, l. pl. [1], [2]-, [3]-ban. C_1-et BC-re tükrözve C_1'-t, AC-re tükrözve C_1''-t kapjuk. C_1', A_1, B_1, C_1'' egy egyenesen vannak, ebből következik a szerkesztés me-

nete. Pl. a C pontot megkapjuk a C_1C_1'' és a C_1C_1' felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként.

b) A Fagnano-féle feladat bizonyításakor az is kiderül, hogy az ABC háromszög magasságvonalai az $A_1B_1C_1$ háromszögben szögfelezők: ezek szerkeszthetők, az A_1, B_1, C_1 pontokban a megfelelő szögfelezőkre állított merőlegesek kimetszik az ABC háromszög csúcsait.

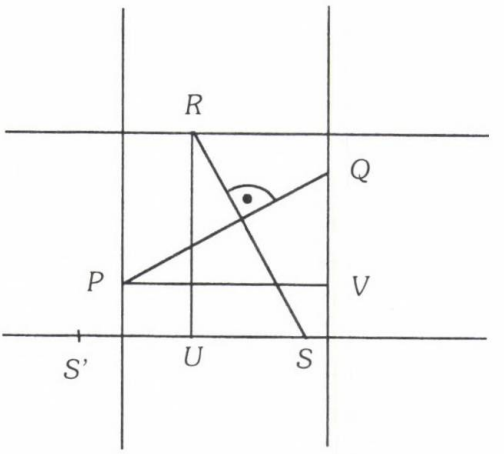


c) Az előző megoldást és a Feuerbach-féle kör tulajdonságait felhasználva M és F, ezek segítségével C (ezután maga a háromszög) szerkeszthető. (M a háromszög magasságpontja, F az MC szakasz felezőpontja.)



7. feladat: Az ABC C-ben derékszögű háromszögbe KLM szabályos háromszöget írtunk úgy, hogy KL párhuzamos AB-vel. Megjelöltük az A, M és a B pontokat. Ezek felhasználásával szerkesszük meg az ABC háromszöget.

Megoldás: C rajta van az AB szakasz fölé írt Thalész körön, a KLM háromszög pedig az ABM_1 szabályos háromszögből C középpontú hasonlósággal adódik. Így a C pontot az MM_1 egyenes és a Thalész kör metszéspontja adja.



8. feladat: Szerkesszünk négyzetet, ha adott oldalegyeneseinek egy-egy pontja.

Megoldás: Először bebizonyítjuk, hogy egy négyzet két szemközti oldala közé eső tetszés szerinti szakasz ugyanakkora, mint a rá (bárhol) emelt merőleges egyenesnek a másik két oldalegyenes közé eső szakasza. (Ábránk szerint $PQ=RS$.) R-ből és P-ből állítsunk merőlegest a szemközti oldalra, a metszéspontok legyenek U és V. Az URS és a VPQ háromszög egybevágó, mert $UR=PV$, $URS\sphericalangle = VPQ\sphericalangle$ (merőleges szárú hegyesszögek) és a két háromszög derékszögű. Tehát $PQ=RS$. Ebből már következik a szerkesztés menete: legyenek adottak P, Q, R és S' a feltételeknek megfelelően. Bocsássunk merőlegest R-ből PQ-ra és mérjük fel rá a PQ szakaszt, kapjuk az S pontot. $S'S$ a négyzet egyik oldalegyenese, erre P-ből és Q-ból merőlegest állítva, valamint R-en át párhuzamost húzva megkapjuk a keresett négyzetet. A különböző esetek vizsgálata szép kombinatorikai feladat lenne (ugyanúgy az előző feladatoknál is), de ezzel most nem foglalkozunk.

Irodalom

[1] Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek (Gondolat, Bp., 1980)

[2] Rademacher-Toeplitz: Számokról és alakzatokról (Tankönyvkiadó, Bp.,1954)
[3] Dörie: A diadalinas matematika (Gondolat, Bp., 1965)
[4] Hajós: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, Bp., 1966)
[5] Geometriai feladatok gyűjteménye I-II.
[6] dr. Lévárdi László – Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok (Tankönyvkiadó, Bp., 1982)

Csete Lajos

Egy mezopotámiai transzformációról

Roppant keveset tudnak a mezopotámiai matematikáról és előzményéről, a Sumér matematikáról még annyit sem. Némely dolgokat azért olvashatunk *Otto Neugebauer* könyvében. [6]

Megdöbbentő, hogy kiásott ékírásos agyagtáblák ezrei pusztulnak el olvasatlanul úgy, hogy tartalmukat nem rögzítik. S mindez híres múzeumokban és gyűjteményekben. Úgy tűnik, hogy fontosabb lenne föltárni a múzeumok mélyén pusztuló agyagtáblákat, mint egyre újabbakat kiásni és azokat nem elolvasni soha. Ugyanis a mezopotámiai éghajlaton megőrződnek a földben az agyagtáblák, míg a nyugati éghajlaton elmállanak, olvashatatlanná válnak.

A mezopotámiai agyagtáblák első gyűjteménye 1846-ban érkezett Franciaországba. 1843-ban ásatta ki *Paul-Émile Botta* (1802–1870) francia konzul Moszul térségében a kújundzsíki és horszábádi halmok alól. Ezeket az alaktalan halmokat, dombokat tell-eknek nevezték. Az első alatt Ninive romjaira bukkan, míg a másodiknál *Sarrukín* (Szargon) asszír király palotájának maradványait találja meg.

A régészeti leleteknek csak egy része került a párizsi Louvre-ba, másik részük még ma is a Tigris folyó medrében pihen, ugyanis néhány szállító tutaj elsüllyedt. Az első palotakönyvtárat 1849–1850-ben találta meg *Austen Henry Layard* (1817–1894) Ninive romjai között. Ez előtt Layard megtalált két asszír várost, Assur-t és Kalhu-t. Ezt követte *Assurbanipal* könyvtárának kiásása, amelyet Layard volt gyakornoka, *Hormuzd Rassam* (1826-1910) végzett 1853-ban. A British Museum körülbelül 20 000 agyagtáblája származik innen. Ezeknek talán egynegyedét közölték a XX. század második felére. El lehet képzelni, hogy akkor mi a helyzet a később felfedezett agyagtáblák tízezreivel.

A német *Georg Friedrich Grotefend* (1775–1853) tanár és Bagdadban pedig az angol *Henry Creswicke Rawlinson* (1810–1895) őrnagy áll neki az ékírásos feliratok megfejtésének (Később Sir Henry.).

1889-ben a német *Robert Koldewey* (1855 –1925) megtalálja Babilon romjait, majd 1927-1929-es években az angol *Sir Leonard Woolley* (1880-1960) megtalálja Ur város királysírjait. De mi nem tudhatunk beszámolni a mezopotámiai népek életéről – haláláról és az izgalmas kutatásról a régmúlt titkai után.

A továbbiakban egy ismeretlen mezopotámiai matematikus fogását alkalmazzuk, amelyet röviden mezopotámiai transzformációnak fogunk nevezni. Ezen mezopotámiai helyettesítés széles körben ismert és alkalmazott volt a babiloni algebrában. [10] E fogást ők egyenletrendszerek megoldásának megkönnyítésére használták. Nem tudjuk megmondani sem azt, hogy az ismeretlen matematikus melyik népből származott, sem azt, hogy mikor találta ki a transzformációt. Mindenesetre többezer éves a módszer.

Mi most egyszerű egyenlőtlenségek igazolására fogjuk használni az ősi mezopotámiai transzformációt.

1. példa

Először a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget igazoljuk, a két számra fennálló formáját. Mint tudjuk, *két nemnegatív valós szám számtani közepe nem kisebb, mint mértani közepük, és a számtani közép pontosan ak-*

kor egyenlő a mértani középpel, hogy ha a számok is egyenlőek. Vagyis ha $a_1 \geq 0$ és $a_2 \geq 0$, *akkor teljesül, hogy*

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2$ *teljesül.*

Bizonyítás a mezopotámiai transzformációval:

Nyilván feltehetjük az általánosság csorbítása nélkül, hogy $a_1 \geq a_2$.

Legyen

$$a_1 = \frac{c}{2} + x \text{ és } a_2 = \frac{c}{2} - x.$$

Alkalmazzuk ezt a transzformációt az egyenlőtlenségre!

$$\frac{\frac{c}{2} + x + \frac{c}{2} - x}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{c}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{c}{2} - x\right)}$$

$$\frac{c}{2} \geq \sqrt{\frac{c^2}{4} - x^2}$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért négyzetre emelhetjük vizsgálódás nélkül:

$$\frac{c^2}{4} \geq \frac{c^2}{4} - x^2$$

Ebből:

$$x^2 \geq 0.$$

Ez pedig minden valós x számra teljesül, s mivel megfordítható átalakításokat végeztünk (ha a_1 és a_2 nemnegatív), ezért az eredeti, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség is fennáll.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn a számtani és mértani közép között, ha $x^2 = 0$, ez pedig pontosan akkor van, ha $x = 0$. Ez pedig azt jelenti a transzformáció képletei szerint, hogy:

$$a_1 = \frac{c}{2} \text{ és } a_2 = \frac{c}{2}.$$

Tehát pontosan $a_1 = a_2$ esetén van egyenlőség a számtani és a mértani közép között.

2. példa

Legyen $x > 0$; $y > 0$ *és* $x + y = 1$. *Igazolja, hogy*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9. \qquad [9]$$

Megoldás: Alakítsuk át az egyenlőtlenséget a következő alakra

$$\left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{y}\right) \geq 9$$

$$(x+1) \cdot (y+1) \geq 9xy,$$

nyugodtan szorozhattunk x-szel és y-nal, hiszen ezek pozitív számok a feltétel szerint. Alkalmazzuk a mezopotámiai transzformációt.

Legyen

$$x = \frac{1}{2} + z \text{ és } y = \frac{1}{2} - z,$$

(hiszen $x + y = 1$) ezeket behelyettesítve az előző egyenlőtlenségbe kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{3}{2} + z\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - z\right) \geq 9 \cdot \left(\frac{1}{2} + z\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - z\right)$$

$$\frac{9}{4} - z^2 \geq \frac{9}{4} - 9z^2$$

Ebből $8z^2 \geq 0$, vagyis $z^2 \geq 0$.

Ez pedig minden valós z-re teljesül, s mivel átalakításaink megfordíthatóak (ha $x > 0$; $y > 0$); ezért az eredeti egyenlőtlenség is teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn az egyenlőtlenségben, ha $z^2 = 0$, vagyis ha $z = 0$, tehát ha

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

3. példa

Igazoljuk, hogy bármely valós a *és* b *számokra fennáll, hogy:*

$$(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) \qquad [5]$$

Megoldás: Végezzük el az egyenlőtlenségen a következő transzformációt:

$$a = \frac{x}{2} + y \text{ és } b = \frac{x}{2} - y,$$

ahol x és y alkalmas valós számok.

$$\left(\frac{x}{2} + y + \frac{x}{2} - y\right)^4 \leq 8 \cdot \left(\left(\frac{x}{2} + y\right)^4 + \left(\frac{x}{2} - y\right)^4\right)$$

$$x^4 \leq 8 \cdot \left(\left(\frac{x}{2} + y\right)^4 + \left(\frac{x}{2} - y\right)^4\right)$$

A binomiális tétellel könnyen elvégezhetjük a jobb oldalon a negyedik hatványra emeléseket. Ha a tanulók nem ismerik a tételt, akkor

kénytelenek lesznek négyzetre emeléssel, illetve a kifejezések szorozgatásával elvégezni a negyedik hatványozást.

Azt kapjuk, hogy:

$$x^4 \le 8 \cdot \left(\left(\frac{1}{16} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^3 \cdot y + \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y^3 + y^4 \right) \left(\frac{1}{16} \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot x^3 \cdot y + \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 - 2 \cdot x \cdot y^3 + y^4 \right) \right)$$

$$x^4 \le 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 + 2 \cdot y^4 \right)$$

Ebből $0 \le 24 \cdot x^2 \cdot y^2 + 16 \cdot y^4$.

Ez pedig minden valós x és y számra fennáll, s mivel átalakításaink megfordíthatóak, ezért az eredeti egyenlőtlenség is teljesül.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be a két számra fennálló négyzetes közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget.

Két nemnegatív valós szám négyzetes közepe nem kisebb, mint a számtani közepük. A négyzetes közép akkor és csak akkor egyenlő a számtani középpel, ha a számok is egyenlőek. Vagyis ha $a_1 \ge 0$ és $a_2 \ge 0$, akkor fennáll, hogy

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \ge \frac{a_1 + a_2}{2},$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2$.

2. Igazoljuk, hogy ha az a és b valós számok összege 1, akkor

$$a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8}.$$

(Egyetemi felvételi feladat 1988, [9] . 179. feladat)

3. *Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalai a, b, c, a területe pedig t, akkor $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4 \cdot t \cdot \sqrt{3}$ (Ez a nevezetes Weitzenböck-féle egyenlőtlenség 1919-ből.)

(Egy megoldás kezdete: A c oldalú szabályos háromszög magassága

$$c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ezt Pitagorasz tételével kaphatjuk. Legyen egy a, b, c oldalú háromszög leghosszabb oldala c. A c oldalhoz tartozó magasság hossza felírható

$$c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y$$

alakban. E magasság talppontja két részre bontja c -t:

$\left(\frac{c}{2} + 2\right)$ – re és $\left(\frac{c}{2} - x\right)$ – re. Folytassuk!) [4]

Irodalom

[1] A művészet kezdetei, Corvina, Budapest, 1990. 6. és 7. fejezet

[2] Ceram, C. W., A régészet regénye, Háttér Kiadó, Budapest, (Korábban a Gondolat Kiadó kiadásában 1965-ben.)

[3] Courant, R. – H. Robbins, Mi a matematika?, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1966., 358-359. old.

[4] Kosztolányi József – Makay Géza – Pintér Klára – Pintér Lajos, Matematikai problémakalauz 1. , Polygon, Szeged, 1999. 110. old.

[5] Kvant, 91/12. 22. oldal, „Druzsba" 91 verseny

[6] Neugebauer, Otto, Egzakt tudományok az ókorban, Gondolat, Budapest, 1984.

[7] Oates, David – Joan Oates, A civilizáció hajnala (A múlt születése sorozatból), Helikon, Budapest, 1983.

[8] Oppenheim, A. Leo, Az ókori Mezopotámia, Gondolat Kiadó, Budapest, 1982.

[9] Scharnítzky Viktor, Egyetemi felvételi feladatok matematikából (VIII. kötet)1986-1988. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990. 116. feladat

[10] Waerden, B. L. van der, Egy tudomány ébredése, Gondolat, Budapest, 1977.

[11] Woolley, Sir Leonard , Ur városa és a vízözön, Officina, Budapest, 1943.

Austea Henry Layard kissé hasonlítható a mi *Kőrösi Csoma Sándor*unkhoz és Stein Aurélunkhoz. Layard gyermekkorában bejárta Itáliát és annak múzeumait. Az Ezeregyéjszaka meséit olvasván Kelet annyira megigézte, hogy keleti nyelveket tanult és készült Bagdadba, a keleti világba. Jelentős ásatásokat végzett a mai Irak és Irán területén. Eredeti művei: *Niniveh and its remains*, London, 1848. (2. kötet, 100 képpel), Discoveries in the ruins of Niniveh and Babylon, London, 1853.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2003. május 31.

220. Bergengócia leghosszabb – nyílegyenes – utcájában az egyik oldalon 2003 ház van. Körüljük egymást nem metsző téglalap alakú kerítéseket építenek oly módon, hogy bármely kerítésen belül legyen legalább egy ház, és semelyik két kerítés ne tartalmazza ugyanazon házakat. Legfeljebb hány kerítést építhettek?

Kiss Sándor, Nyíregyháza

221. Az ABC háromszög beírt körének a BC, CA és AB oldalakon levő érintési pontjai rendre A_1, B_1 és C_1. Tekintsük azt a téglatestet, amelynek egy csúcsból induló élei B_1C_1, C_1A_1 és A_1B_1. Jelöljük a téglatest térfogatát V-vel, felszínét F-fel, a $\frac{V}{F}$ arányt m-mel, az ABC háromszög kerületét K-val. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{K}{m} \geq 36.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Bíró Bálint, Eger

222. Csonkakúp alakú poharat színültig töltünk vízzel, majd óvatosan kiöntünk annyit, hogy a pohár feneke éppen kibukkanjon. (A megdöntött pohár feneke akkor bukkan ki, ha a víz felszínének síkja érinti a pohár alap-, illetve fedőkörét.) A pohárban ekkor az eredeti vízmennyiség 2/7 része van. Mekkora a pohár alap- és fedőköre átmérőjének aránya?

Rakonczai György, Budapest

223. Igazoljuk, hogy az $\{x^2\} + \{y^2\} = \{z^3\}$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a nem egész racionális számok körében. ($\{a\}$ az a szám törtrészét jelöli.)

Bencze Mihály, Brassó

224. Igazoljuk, hogy ha m és n tetszőleges nullától különböző egész számok, akkor az

$$n(x^2 + y^2 - z^2) = mxy$$

egyenletnek végtelen sok olyan pozitív egészekből álló (x, y, z) megoldása van, amelyekre teljesül, hogy $(x, y, z)=1$, azaz x, y és z legnagyobb közös osztója 1.

Dályay Pál Péter, Szeged

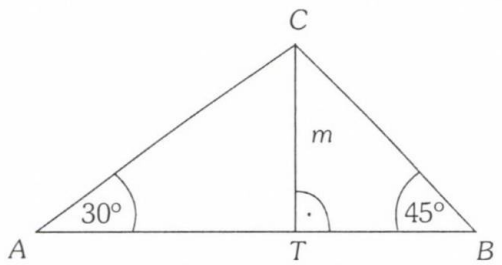
A lap 2002/5. számának feladatrovatában a **210.** feladat szerkesztési hiba folytán hiányosan jelent meg, ezért most újra kitűzzük. A megoldás beküldési határideje a most kitűzött feladatok megoldásának beküldési határideje. A hibáért elnézést kérünk.

210. Határozzuk meg mindazokat az x, y, z pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy y prím és nem osztója z-nek, valamint 3 sem osztója z-nek, és $x^3 - y^3 = z^2$.

Feladatmegoldások (205-209. feladatok)

205. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$. Határozzuk meg azt a k pozitív számot, amelyre teljesül, hogy $AB^2 = k \cdot BC^2 + CA^2$.

Megoldás: Jelölje az ABC háromszög AB oldalához tartozó CT magasság hosszát m *(1. ábra).*



1. ábra

A CTB háromszög egyenlő szárú derékszögű, ezért $TB = m$ és $BC = m\sqrt{2}$. Az ATC háromszög egy szabályos háromszög „fele", ezért $AT = m\sqrt{3}$ és $AC = 2m$. Behelyettesítve a feltételi egyenletbe

$$((\sqrt{3}+1)m)^2 = k(m\sqrt{2})^2 + (2m)^2,$$

ahonnan adódik, hogy $k = \sqrt{3}$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 17.

206. Jelölje p_n az n-edik prímszámot, $\pi(x)$ pedig az x-nél nem nagyobb prímszámok számát. Mutassuk meg, hogy bármely 6-nál nem kisebb pozitív egész n esetén

$$\pi(\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) > 2n.$$

Megoldás: Teljes indukcióval bizonyítunk, és felhasználjuk Csebisev tételét (Bertrand-posztulátum), amely szerint, ha $n > 1$, akkor n és $2n$ között mindig van prímszám.

Az állítás igaz $n = 6$ esetére, ugyanis

$$\pi(\sqrt{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}) =$$
$$= \pi(\sqrt{30030}) \geq \pi(50) = 15 > 2\cdot6.$$

Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 6$ esetén igaz az állítás. Ekkor $p_{n+1} > 16$, ezért

$$\sqrt{p_1p_2\ldots p_np_{n+1}} > 4\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}.$$

Csebisev tétele értelmében

$$\pi(2\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) - \pi(\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) \geq 1 \text{ és}$$
$$\pi(4\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) - \pi(2\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) \geq 1,$$

így

$$\pi(\sqrt{p_1p_2\ldots p_np_{n+1}}) > \pi(4\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) \geq$$
$$\geq \pi(2\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) + 1 \geq \pi(\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}) + 2 > 2(n+1),$$

amivel az állítást igazoltuk.

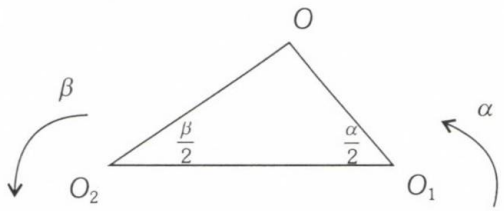
Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

207. Vegyük fel az ABC háromszög AB és AC oldalára kifelé a PBA és QAC szabályos háromszögeket. Jelölje R a BC oldal felezőpontját, G pedig a QAC háromszög középpontját. Mit mondhatunk a PRG háromszögről?

Megoldás: Ismert, hogy egy O_1 centrumú α szögű és egy O_2 centrumú β szögű forgatás szorzata egy $\alpha + \beta$ szögű forgatás, ha $\alpha + \beta$ nem a teljes szög egész számú többszöröse. Ez utóbbi forgatás O középpontja az O_1 és O_2 pontokkal együtt egy olyan háromszöget alkot, amelyben

$$OO_1O_2\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} \text{ és } O_1O_2O\sphericalangle = \frac{\beta}{2} \text{ (2.ábra).}$$



2. ábra

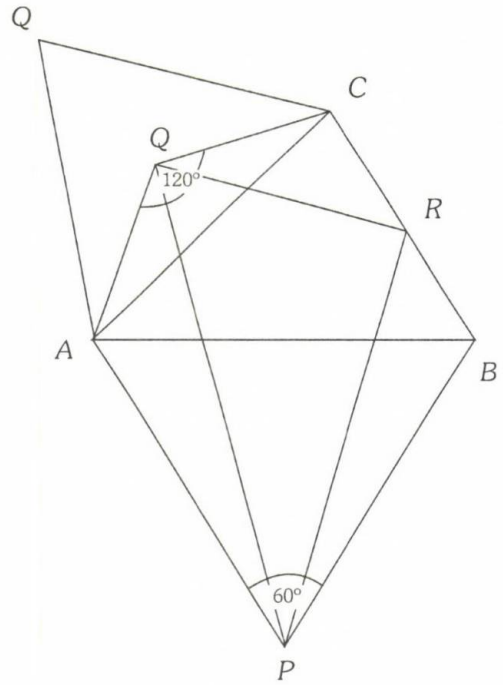
(Lásd pl. Elemi matematika II. – Geometriai transzformációk (ELTE jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.) 24-25. oldal.)

A P pont körüli 60°-os forgatás B-t A-ba, a G pont körüli 120°-os forgatás A-t C-be viszi. A két forgatás szorzata egy B-t C-be vivő középpontos tükrözés, amelynek középpontja nyilvánvalóan az R pont *(3. ábra).*

A fentiek alapján kaptuk, hogy a PRG háromszög egy olyan derékszögű háromszög, amelyben $RPG\sphericalangle = 60°$ és $GPR\sphericalangle = 30°$.

Kiss Zoltán, Pécs

A megoldók száma: 16.



3. ábra

208. Jelölje $d(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát, $\mu(n)$ pedig a Möbius-féle függvényt. Igazoljuk, hogy $d(n) + \mu^2(n) = d(n^2)$ pontosan akkor, ha n prímszám!

Megoldás: Ha az n pozitív egész szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1),$$

$$d(n^2) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\ldots(2\alpha_k + 1),$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 1 \\ (-1)^k, \text{ ha } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1 \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases}$$

Ha $n = p$ (p prím), akkor

$$d(p) + \mu^2(p) = 2 + 1 = d(p^2),$$

azaz teljesül a feladat egyenlete.

Ha $n=1$, akkor $d(1) + \mu^2(1) = 1 + 1 = 2 > 1 = d(1^2)$, azaz az egyenlet nem teljesül.

Ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, és van olyan α_i, amelyik nagyobb 1-nél, akkor $d(n) + \mu^2(n) = d(n)$.

Így a $d(n) = d(n^2)$ egyenletnek kellene teljesülnie, ami viszont csak $n = 1$ esetén teljesül, ami ellentmondás.

Ha $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, akkor $d(n) + \mu^2(n) = 2^k + 1$ és $d(n^2) = 3^k$, azaz $2^k + 1 = 3^k$ egyenletnek kellene teljesülnie, ami pontosan a $k = 1$ esetén következik be, azaz amikor n prím.

Ezzel az állítást beláttuk.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 15.

209. Minden pozitív egész n esetén tekintsük azt a háromszöget, melynek oldalai $4n^2$, $4n^4 - 1$, $4n^4 + 1$ hosszúságúak. Jelölje a $4n^2$ hosszúságú oldallal szemközti belső szög radiánban vett mértékét α_n. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}.$$

I. megoldás: Pitagorasz tételének megfordításából adódik, hogy a háromszögek derékszögűek, így

$$\sin\alpha_n = \frac{4n^2}{4n^4 + 1} \quad \text{és} \quad \cos\alpha_n = \frac{4n^4 - 1}{4n^4 + 1}.$$

Ezeket, majd a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

szinuszát és koszinuszát az első néhány n értékre kiszámolva a következő sejtést fogalmazhatjuk meg:

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \frac{2n(n+1)}{2n(n+1)+1} \text{ és}$$

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \frac{2n+1}{2n(n+1)+1}.$$

Ezeket az összefüggéseket teljes indukcióval bizonyítjuk.

Könnyen látható, hogy $n = 1$ esetén mindkét összefüggés teljesül.

Tegyük fel, hogy képleteink $(n - 1)$-re is érvényesek. Ekkor

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)=\sin\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)\cdot\cos\alpha_n+\cos\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right)\cdot\sin\alpha_n=$$

$$=\frac{2n(n-1)}{2n(n-1)+1}\cdot\frac{4n^4-1}{4n^4+1}+\frac{2n-1}{2n(n-1)+1}\cdot\frac{4n^2}{4n^4+1}.$$

A részletes számításokat mellőzve kapjuk, hogy

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)=$$

$$=\frac{(4n^4-8n^3+8n^2-4n+1)(2n(n+1))}{(4n^4-8n^3+8n^2-4n+1)(2n(n+1)+1)}=$$

$$=\frac{2n(n+1)}{2n(n+1)+1}$$

tehát sejtésünk egyik része igaz. Hasonlóan látható be a koszinuszos összefüggés is.

Ebből

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{2n(n+1)+1}=1,$$

ami a szinusz függvény (pontosabban az arcsin függvény) folytonossága miatt éppen azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i=\frac{\pi}{2}.$$

Csorba Ferenc, Győr,
Kiss Géza, Kisújszállás

II. megoldás: A feladat megoldásához két segédtételt használunk fel.

1. segédtétel: Ha $x>0$, akkor

$$\arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}=2\operatorname{arcctg}x.$$

Bizonyítás: Legyen

$$f:\ R^+\to R,\ f(x)=\arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}-2\operatorname{arcctg}x.$$

f deriválható R^+-on, és

$$f'(x)=\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}+\frac{2}{1+x^2}=0.$$

Ebből adódik, hogy f konstans R^+-on, és mivel például

$$f(\sqrt{3})=\arccos\frac{1}{2}-2\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=0,$$

ezért $f(x)$ 0 bármely pozitív valós x esetén.

2. segédtétel: $\operatorname{arcctg}2x^2=\operatorname{arcctg}(2x-1)-\operatorname{arcctg}(2x+1)$ bármely valós x esetén.

Ez a segédtétel a két valós szám kotangensének különbségére vonatkozó összefüggés segítségével könnyen igazolható.

A két segédtételt felhasználva:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\arccos\frac{4i^4-1}{4i^4+1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\arccos\frac{(2i^2)^2-1}{(2i^2)^2+1}=2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{arcctg}2i^2=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{arcctg}(2i-1)-\operatorname{arcctg}(2i+1)).$$

Ez egy teleszkópikus összeg, ezért

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2(\operatorname{arcctg}1-\operatorname{arcctg}(2n+1))=$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arcctg}(2n+1).$$

Így

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i=\lim_{n\to\infty}S_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arcctg}(2n+1)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

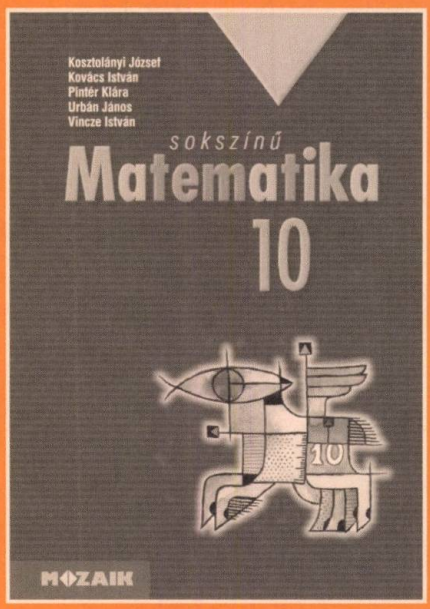
Molnár István, Gyula

A megoldók száma: 11.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (205. 3 mód, 207., 208.); Bukorné Both Emőke, Révkomárom (205., 206., 208.); Csorba Ferenc, Győr (205., 206., 207. 2 mód, 208., 209.); Dályay Pál Péter, Szeged (205-209.); Kamarás Lajos, Pécs (205-209.); Kiss Géza, Kisújszállás (205-209.); Kiss Zoltán, Pécs (205-209.); László Sándor, Szombathely (205., 207., 208.); Molnár István, Gyula (205., 207-209.); Nagy Béla, Sarkad (205-208.); Rakonczai György, Budapest (205-209.); Schmidt Edit, Budapest (205-208.); Schuler László, Budapest (205., 207., 209.); Simon József, Csíkszereda (205., 207.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (205-209.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (205-209.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (205., 207-209.).

SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD

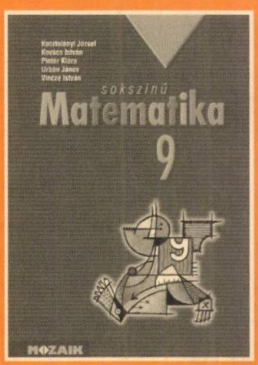
EGYEDÜLÁLLÓ SIKER A TANKÖNYVEK KÖZÖTT

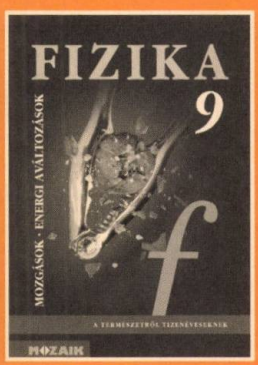


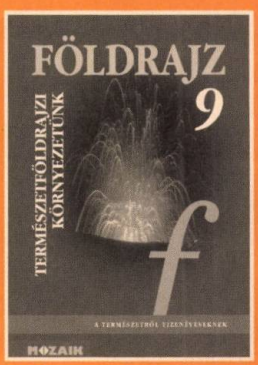
Az elmúlt évben három rangos díjat is elnyert az új 9. évfolyamos matematika tankönyv: a *Nemzetközi Könyvfesztivál* Budai-díját, a *Szép Magyar Könyv 2001* Verseny díját és különdíját. Szeptember végén került az iskolákba a sorozat 10. osztályos kötete. A tankönyvek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

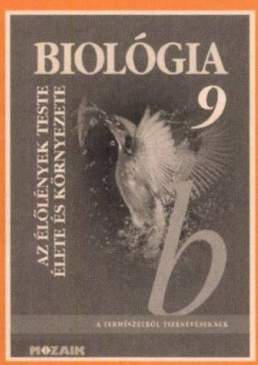
A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

A SZÉP MAGYAR KÖNYV 2001 VERSENY DÍJNYERTES KÖTETEI









MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERESEGYHÁZI SZÓLNOKI KÖNYVTÁR

Bevezetés a hibajavító kódolásba II. rész

(Hraskó András – Szõnyi Tamás)

A szabályos ötszög szerkesztésének egy lehetséges módja

(Csorba Ferenc)

A Knuth-féle számokról

(Csete Lajos)

XI. ÉVFOLYAM 2003 3

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1200 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltban: Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Kőváry Károly (1923-2003)
Surányi László tanár, Budapest

Bevezetés a hibajavító kódolásba II.
Hraskó András – Szőnyi Tamás, Budapest

Beszámoló a Varga Tamás Módszertani Napokról (2002. november 8-9.)
Dr. Pálfalvi Józsefné docens, Budapest

A szabályos ötszög szerkesztésének egy lehetséges módja
Csorba Ferenc, Győr
Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest

A Knuth-féle számokról
Csete Lajos, Markotabödöge

XXXII. Országos Kalmár László Verseny Megyei fordulójának feladatai és megoldásai

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Surányi László

Kőváry Károly (1923-2003)

Kőváry Károlyt szinte mindenki Kavicsként vagy Kavics tanár úrként ismerte. Nevét, melyet még első iskolájában kapott, büszkén viselte, hiszen tanítványaitól kapta. S hogy mit kaptak tőle diákjai, kollégái s mindazok, akik a közelében lehettek? Kaptunk tőle tudást, és megtanított a matematika szeretetére, elsősorban a geometria szeretetére. A geometria a matematika művészete, mondta. De tanulhattunk tőle történelmet is. A Laricsev feladatait sokszor így adta fel: III. Béla uralkodásának második éve, és nevetve megvárta, amíg kitotózzuk, melyik feladatra is gondolt. „Gondolataidat nyom nélkül elröppenni ne hagyd", idézte Kölcseyt, ha valakinek jó ötlete volt, de nem akarta leírni a füzetébe. És hosszan sorolhatnám, hogy mi mindent tanított meg észrevétlenül. De sokkal fontosabb, amit mindezen túl, mindezek előtt a legszemélyesebben kaptunk tőle. Aki ismerte, akit tanított, az tudja, hogy milyen jó volt tudni, hogy van egy biztos pont az életünkben, akit úgy hívnak: Kavics, akinek bátorító szavára, feszültségoldó mosolyára, tüzes vidámságára a legrosszabb pillanatainkban is számíthattunk. Számíthattunk ingyen, és anélkül, hogy bármit is szólnunk kellett volna. Nehéz erről beszélni, amikor még olyan közel van a megdöbbentő és szinte felfoghatatlan hír, hogy az, aki ilyen biztonságot, bizalmat és erőt sugárzott magából, meghalt. A megszokás majdnem azt mondatta velem: többé nincs közöttünk – de a megszokás pontatlan és megbízhatatlan fogalmazó. Mert nem igaz, hogy Kavics nincs közöttünk. Kevés ember van, akiről ilyen biztosan mondhatjuk, hogy most is közöttünk van, amikor pedig hiánya nagyon is fájdalmasan hasít belénk.

Ez az ellentmondás nem hagy nyugodni, és arra kényszerít, hogy ne érjem be azzal a nagyon is sok mindennel, amit könnyű elmondani róla, hanem megpróbáljam fölidézni azt a legfontosabbat, amit Kavics jelentett nekem és nekünk, mindazoknak, akik a közelében élhettek. Mert a végtelenségig lehetne idézni azokat a mozzanatokat, amelyekkel olyan otthonossá tette a matematikaórát mindenki számára, hiszen minden tanítványa őriz ilyen emléket. Számtalan, nem kifejezetten matematikai érdeklődésű tanítványával tudta megízleltetni a matematikai felfedezés örömét, és tudta így beavatni őket a matematika szépségébe. És nem titok, de végre nyilvánosan ki kell mondani, hogy a Fazekas Gimnáziumból nélküle nem lett volna az, ami, hogy a Fazekas matematika tagozata azért képvisel ma is világszínvonalat, mert Kavics az alatt a majdnem 30 év alatt, amikor ott tanított, iskolát teremtett. Ő honosította meg a műhelymunkának azt a hangulatát, amely olyan otthonossá tette az óráit. Nem véletlenül ő kapta – Urbán Jánossal együtt – az első Rátz tanár úr díjat: mert ami Rátz tanár úr volt az egykori Fasori Gimnáziumnak, az Kavics a Fazekasnak.

De a legfontosabbat még ezzel sem mondtam el. Mert a legfontosabbról, amit tanulni lehetett tőle, nehezebb beszélni. Azt ugyanis szinte észrevétlenül, mert magától értetődően adta, sugározta magából. Az igazi szeretet nem látható, nem hivalkodik. Éppen ezért Kavics közelében mindenki megértőbb, türelmesebb lett, mert „ráragadt" valami Kavics természetéből. Kire több, kire kevesebb, érzékenységének megfelelően. S hányszor kérdeztük meg magunktól csendben: vajon mennyi „ragadt ránk" Kavics szeretetének tágasságából és erejéből? Mert a legfontosabbra, amit Ka-

vics sugárzott magából, ez a megfelelő kifejezés: szeretetének tágassága és ereje. Ez az, ami mindig közöttünk marad. Ez a szeretet mindenkit elfogadott és mindenkinek erőt adott a növekedéshez.

Mindenkit elfogadott, akiben a legkisebb csíráját is látta a növekedésnek, és végtelen türelme volt, mert tudta: a növekedés mennyi belső konfliktussal jár. Sosem értette a türelmetlen, követelődző tanárokat, akik nem értik, hogy a növekedéshez tér kell, és teret csak a szeretet teremt. És csak az a szeretet teremt teret, amelyik nem tolakodó. Lao-cse, az egyik legrégibb kínai mester mondja, hogy az igazi bölcs nagyra nevel, és nem uralkodik. Kevesen vannak, akik úgy tudnak nevelni és vezetni másokat, hogy nem uralkodnak rajtuk. Kavicstól ezt lehetett tanulni. Vajon mennyire sikerült ezt megtanulnunk, ellesnünk Tőle?

Kavics tágas szeretete **mindenkiben látta és tisztelte az egyéniséget.** A legnehezebben kezelhető és a legmakacsabb diákjait is megszelídítette, mert azt látta bennük, ami erősödni, növekedni akar. Mindenki egyéniségét tisztelte, de csak mosolyogna azon, aki csak elvből tiszteli mindenkiben az egyéniséget. Mert az egyéniség tisztelete nála sokkal mélyebbről, a természetéből fakadt, s mert ösztönösen tudta, hogy sokkal mélyebben kell hozzá ismerni és tisztelni az emberi lét konfliktusait, s hogy ez az ismeret elvekkel nem helyettesíthető.

Kavics **szeretete erőt adott a növekedéshez.** Talán ez volt az, amit a legjobban szeretett és kifejezetten élvezett tanítványaiban: amikor látta, hogyan növekednek, hogyan sikerül legyőzniük a makacsul ellenálló nehézséget egy még nagyobb makacssággal. Amikor látta felcsillanni a szemükben az értelmet. Maga is csillogó szemmel tudott beszélni arról, hogy még állni alig tudó „pótunokájának" hosszú küzdelem után sikerült végre kidobnia a labdát a rácsos ágyból, vagy ha tanítványának sikerült megoldania egy sokáig ellenálló feladatot: a növekedésnek, az akarat erősödésének örült csillogó szeme. S szemének ez a csillogása a legroszszabb pillanatainkban is erőt adott, és a saját erőnkre emlékeztetett mindannyiunkat, akik a közelében lehettünk. Ahogyan a temetésen több tanítványa is fogalmazott: nem búcsúzunk, hanem köszönetet mondunk Kavics tanár úrnak mindazért, amit kaptunk tőle. Köszönetet mondunk azért, ami már mindörökre velünk marad, s amiért mostantól mi vagyunk a felelősek, hogy mindörökre itt maradjon közöttünk.

(Elhangzott Kőváry Károly temetésén, Vácott, 2003. március 19-én)

Kőváry Károly életútja

Kőváry Károly 1923. május 10-én született. A szegedi piarista gimnázium elvégzése után 1941-ben belépett a Piarista Rendbe, majd, miután a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetemen matematika-fizika szakos diplomát szerzett, 1947-ben pappá is szentelték. Az egyházi iskolák államosítása után pár évig lelkipásztori teendőket látott el Budapesten, majd 1952-től tanított: előbb egy évet a Kossuth Lajos Gimnáziumban, majd tíz évig a Bagi Ilona Gimnáziumban. 1963-ban került a Fővárosi Fazekas Mihály Gimnáziumba, ahol 28 évig volt pedagógus. Ez alatt úttörő munkát végzett a speciális matematika tagozat beindításánál. A tagozatos tanterv kialakításánál és didaktikai-pedagógiai módszereinek kidolgozásánál is mértékadó volt az, amit ő csinált saját osztályaiban. Részt vett a tagozatos tankönyvek megírásában és lektorálásában. 15 éven keresztül vezette a Fazekas Gimnázium matematikai munkaközösségét. Tanítványai számos kiemelkedő eredményt értek el a matematikai versenyeken, több mint húsz diákja nyert díjat az évek során a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián. Az OKTV-n és a többi országos évfolyamversenyen még ennél is több tanítványa szerepelt sikeresen. Egykori diákjai ma Magyarország mellett Európa és Amerika legkülönbözőbb híres egyetemein tanítanak, komoly tudományos munkássággal rendelkeznek, és többen közülük itthon akadémikusok. Mate-

matika tanárok egész „generációját" nevelte ki: több iskolában tanítanak egykori tanítványai, akik az ő szellemében nevelik diákjaikat a matematika szeretetére és egymás megértésére. Aktívan részt vett a budapesti pedagógusok továbbképzésében, hosszú ideig szerepet vállalt a tanárképzésben is, mint a Szegedi Tanárképző Főiskola levelező hallgatóinak konzultációvezetője.

1991-ben nyugdíjba vonult, s ezzel párhuzamosan rendje az újra induló váci Piarista Gimnázium igazgatásával bízta meg, emellett tanított is. Sok figyelmet fordított a vidéki, hátrányos helyzetű tehetségek. Órái mindenhol a humorral és örömmel végzett munka műhelyei.

Több mint húsz évig volt a Bolyai János Matematikai Társulat vezetőségének tagja, többek között az Oktatási szakosztály titkára, majd a társulat alelnöke. Évtizedekig részt vállalt az OKTV nem-tagozatos versenybizottságában. Több cikke olvasható A matematika tanítása c. folyóiratban és a KöMaL-ban. 1968-ban a Beke Manó díj második, 1983-ban az első fokozatát kapta. Megkapta a munkaérdemrend ezüst fokozatát is.

2001-ben az első alkalommal kiosztásra kerülő Rátz tanár úr életműdíjat – Urbán Jánossal együtt – Kőváry Károlynak ítélték oda. Szinte halála napjáig tanított.

Hraskó András – Szőnyi Tamás

Bevezetés a hibajavító kódolásba II.

2. Szójátékok

Ezekkel a feladatokkal kettős célunk van. Egyrészt lazításként adhatjuk fel őket, másrészt azt próbáljuk meg bemutatni velük, hogy nyelvünkben egy-egy betű, hang módosítása jelentősen befolyásolhatja az üzenetet. Ez a tömörség adja a nyelv játékosságát, de a vizsgált alkalmazásoknál pont ez a tulajdonság az, amit ki szeretnénk küszöbölni.

2.1 KAP, LAP, NAP, PAP, (újabban: RAP, WAP); BÁR, BÉR, BÍR, BOR, BÓR, BŐR, BÚR; HAB, HAJ, HAL, HAS, HAT.

2.2 GAP (rés), TAP (csap), RAP (táncfajta), LAP (futam), BAP (szendvicsféle), CAP (sapka), MAP (térkép), NAP (szunyókál), SAP (fanedv), YAP (ugatás), esetleg ZAP (szleng: lézersugár fegyver hangja);

BAR; illetve HAD (have múltidőben), HAT (kalap), HAM (sonka), HAG (banya), HAS (have 3. személy), HAW (galagonya), HAY (széna).

2.3 HÁZ, GÁZ, LÁZ, MÁZ, RÁZ, VÁZ, HOZ, HÚZ, HÁG, HÁJ, HÁL, HÁM, HÁT, (13) + HÁP(?); KEREK, BEREK, MEREK, PEREK, TEREK, VEREK, KÉREK, KELEK, KENEK, KEZEK, KERÉK, KERES, KERET, (13) + SEREK(?), + EREK.

2.4 pl. GYORS.

2.5 A szerzőket is érdeklik a válaszok.

2.6 Két megoldás is van: BÉLA, FÉLJ.

3. Kódolnak a nebulók

3.1 Ezzel a feladattal érdemes korán próbálkozni. Ha a gyerekek már ismerik a 10-estől különböző számrendszereket is, akkor ritkán próbálkoznak mással. Ha viszont még nem láttak ilyet, akkor sok szép egyéni ötletet hoznak, és a feladat arra (is) jó, hogy elvezesse a nebulókat a számrendszer gondolatához, megértsék általa a számrendszerek tömörségét és hatékonyságát.

Típushibák:

1. A 0 számjegynek üres helyet hagynak ki, de nem állapodnak meg előtte, hogy az asztal mely pontjától, meddig, mekkora hézagokkal rakják a pénzdarabot (hasonló probléma volt a babiloni számírással);

2. Nem állapodnak meg, hogy honnan nézik az asztalt.

3.1 I. megoldása *(Sorrend)*

119-ig kódolunk öt különböző méretű érme segítségével. Az öt érmét 5!=120 féleképpen rakhatjuk sorba, a lehetséges sorbarendezéseket feleltetjük meg a számoknak pl. a következő módon.

Attól függően, hogy az első érme méretben a legkisebb, a második legkisebb stb., a [0; 23], a [24; 47], stb. intervallum valamely számának felel meg. Ezen belül a második érme mérete alapján 6-os, a harmadik érme szerint 2-es, a negyedik (és ötödik) érme szerint 1-es „csoportokat" hozhatunk létre. Ha pl. a négy érme méretbeli sorrendje megfelel a 3, 2, 5, 1, 4 számokénak, akkor az intervallumok sorban a [48; 71], a [78; 83], a [88; 89] és a [88; 88], tehát a 88 a kódolt szám.

3.1 II. megoldása *(Kettes számrendszer)*

31-ig kódolunk kettes számrendszerben. Az öt érmét egymás mellé tesszük és a „fej" felel meg az 1-es, az „írás" pedig a 0-ás számjegynek. Viszonylag biztonságosan (tévedésmentesen) át lehet térni 24-es alapú számrendszerbe, ha azt is figyelembe vesszük, hogy az érmén a szám (illetve a kép) hogyan áll (4 fő irány = 4 lehetőség) és azt is, hogy az asztal adott függőleges sávján belül hol van (fölül, középen, lent = 3 lehetőség).

3.2 Tanács: hagyjunk legalább egy nap gondolkodási időt!

3.2 I. megoldása *(Duplázás)*

Használjunk csak négy pénzérmét! Kettővel az asztal egyik felén kódoljuk bizonyos módszerrel a számot, a másik kettővel pedig ugyanígy kódolunk, csak az asztal másik felén. Az egyik érmepár biztosan megmarad, így könnyű dekódolni a számot. Ha pl. számrendszeres kódot alkalmazunk, akkor így n^2 – 1-ig lehet kódolni, ahol n az előző feladat alapján nagyon nagynak is választható.

3.2 II. megoldása *(Két független kód csúsztatva)*

Ezt a megoldást Pesti Veronika és Szabó Anna diákok adták. 10^5 – 1-ig, tehát tízes számrendszerben legfeljebb ötjegyű számokat kódoltak. Az ötnél kevesebb jegyű számok elé annyi 0-t írtak, hogy ötjegyű legyen. Az öt számjegyet az öt pénzérmével egyszerre kétféleképpen is kódolták, de ugyanazt a számjegyet nem ugyanaz a pénzérme kódolta a két rendszerben. Így bármelyik pénzérme tűnt el, a többi segítségével meg tudták határozni az öt jegyet, sőt még önellenőrzésre is volt módjuk, mert a megmaradt érméken három jegy kétféleképpen is kódolva volt.

Az első kódrendszerhez az asztalt öt függőleges tartományra osztották, az első jegynek megfelelő érmét balról az első, a másodiknak megfelelőt balról a második stb. téglalap alakú tartományba helyezték. Egy-egy téglalap alakú tartomány $5 \cdot 2 = 10$ részre volt osztva, az egyes részek feleltek meg az egyes számjegyeknek. Az érmét a téglalapon belül a számjegynek megfelelő részbe tették.

A második rendszerben a balról első érme a szám balról második jegyét, a második pénzérme a szám harmadik jegyét, ..., az ötödik érme a szám első jegyét kódolja. A 10 lehetséges jegynek az érme 10 lehetséges állását ([0;4] = fej, [5;9] = írás, ezen belül: [0;5] = áll, [1;6] = balra fordul, [2;7] = jobbra fordul, [3;8] = fejenáll, [4;9] = ferde) feleltették meg.

A tanár a második érmét vette le az asztalról. A kintről bejött lány az első kódrendszer alapján kitalálta a szám 1., 3., 4. és 5. jegyét, a második rendszer szerint pedig visszafejtette az 5., 2., 3. és 4. jegyeket.

3.2 III. megoldása *(Paritásjelző bit)*

15-ig kódolunk. Az asztal bal fölső sarkától kezdve rakjuk ki egymás mellé az érméket. Az első néggyel 2-es számrendszerben kódoljuk a számot (fej=1, írás=0), az ötödiket pedig úgy tesszük hozzá, hogy a jegyek összege (azaz a fejek száma) páros legyen. Az elvett érmének látható lesz a helye és az is könnyen meghatározható, hogy fej volt vagy írás, így kitalálható a szám.

Ez a megoldás *n*-es számrendszerre is általánosítható, amit azonban még az okos gyerekek se szoktak észrevenni. A „paritásjelző bit"-et az általános esetben pl. úgy választhatjuk, hogy a jegyek összege osztható legyen n-nel. Így meghatározható a hiányzó jegy, $n^4 - 1$-ig vállalhatjuk a kódolást.

4. Kódok a gyakorlatban

A megoldások előtt rövid összefoglalást adunk a legfontosabb kódelméleti fogalmakról, amelyekre a 4.5-4.9 feladatokban hivatkoztunk is.

Legyen adva egy tetszőleges *abc* (betűkészlet, a kódolásnál tipikusan {0, 1}) és egy *n* pozitív egész (a szavak hossza). Az *abc* elemeiből készíthető *n* hosszúságú sorozatokat szavaknak nevezzük. Két szó távolságán *(Hamming távolság)* azoknak a helyeknek a számát értjük, amelyeken különböznek egymástól. (Az *AABC, CBBC* szavak távolsága pld 2, mert az első és a második helyen térnek el egymástól.)

Az általános megközelítésben *kód*on a szavak egy tetszőleges részhalmazát értjük. A kódba tartozó szavak a kódszavak. Úgy képzeljük, hogy két fél kommunikál egymással és a kódszavak az értelemmel bíró jelek. Előfordulhat, hogy a kommunikáció során egy kódszó sérül (a küldő hibázott, a kommunikációs csatorna zaja módosította az üzenetet vagy a fogadó fél hibásan olvasta ki a szót). A kapott szót úgy javítjuk, hogy átírjuk a tőle legkisebb (Hamming) távolságra lévő egyik kódszóra.

A kód *k-hiba javító*, ha bármelyik kódszavában *k* vagy annál kevesebb betű módosulása esetén a fenti hibajavító módszer mindig egyértelműen helyreállítja az eredeti üzenetet.

A kód *k-hiba jelző*, ha bármelyik kódszavában *k* vagy annál kevesebb betű módosulása esetén nem juthatunk másik kódszóhoz, azaz a fogadó fél észre tudja venni, hogy hiba van, mert nem kódszót olvas.

A kód *k-törlés javító*, ha bármelyik kódszavában k vagy annál kevesebb betű törlődése (olvashatatlansága) esetén a hiányzó k betű csak egyféleképpen tölthető ki úgy, hogy kódszót kapjunk.

A kód minimális távolsága a kódszavai között fellépő legkisebb pozitív Hamming távolság.

4.1 Lásd [1] 237. feladatát!

4.2 Lásd [1] 237. feladatához kapcsolódó 3. Tanári megjegyzést (303-304. old.) vagy [2] 145. oldalán található leírást!

4.3 Lásd [1] 237. feladatához kapcsolódó 2. Tanári megjegyzést (303. old.)!

4.4 A háromféle betű segítségével egy szó első két karakterét $3 \cdot 3 = 9$-féleképpen választhatjuk meg. A III.) feltétel szerint a 9 közül bármelyik lehetőséget csak legfeljebb egyféleképpen lehet befejezni értelmes szóként. Tehát legfeljebb 9 értelmes szó lehet a nyelvben.

Ennyi lehet is, mint a 0, 1, 2 „betűk" segítségével az alábbi példa mutatja:

000, 012, 021, 102, 201, 120, 210, 111, 222.

A szavakat úgy választottuk meg, hogy a jegyek összege osztható legyen hárommal, így bármelyik jegy kitalálható a másik kettő ismeretében.

4.5 (Ezt a feladatot csak akkor ajánljuk külön feladni, ha a 4.6 megoldása közben a gyerekek maguk nem vetik fel.)

Ha két kódszó csak két helyen tér el egymástól (pl. *AABC* és *CBBC*), akkor találhatunk olyan szót, amely mindkét kódszótól csak egy helyen tér el. Ilyen szót pl. úgy kaphatunk, hogy

az egyik kódszó egyik betűjét (a két előbb említett helyen levők közül) a másik kódszó ugyanazon helyen lévő betűjére cseréljük (pl. *AABC* → *CABC*). Ha üzenetként ezt a szót kapjuk, akkor nem tudjuk, hogy a két kódszó közül melyiket küldték el, ha egy hibát feltételezünk.

Ha csak egy helyen tér el a két kódszó, akkor bármelyiküket megkapva zavarba jövünk: aszerint, hogy volt hiba vagy nem volt, kétféleképpen is értelmezhetjük az üzenetet.

Ha bármely két kódszó legalább három helyen tér el egymástól, akkor nem lehet olyan szó, amely két kódszótól is csak legfeljebb egy helyen tér el, így egy hiba esetén mindig egyértelműen helyreállítható a szó.

4.6 I. megoldása *(A minimális távolság alapján)* Tegyük fel, hogy már van egy ilyen kódunk! Legyenek a betűk 0, 1, 2 és gyűjtsük össze a 0-val kezdődő kódszavakat! Legfeljebb három lehet belőlük, mert ha már négy volna, akkor volna közöttük kettő, amelyek a második „betűben" is megegyeznek, és így legfeljebb csak két helyen térnek el egymástól. Teljesen hasonlóan az 1-gyel és a 2-vel kezdődő szavakból is legfeljebb három-három lehet, tehát összesen legfeljebb csak 9 ilyen kódszó van.

Találtam is 9 megfelelő kódszót:

0000	1021	2012
0111	1102	2120
0222	1210	2201

Annak alapján kerestem őket, hogy tudtam, mindegyik helyen mind a három betűnek három-három kódszóban kell előfordulnia.

4.6 II. megoldása *(Algebrai konstrukció az 1.2 feladat analógiájára)*
Ha a kódszavakat 1-1 helyen az összes lehetséges módon megváltoztatjuk, akkor csupa különböző szóhoz kell jutnunk. Egy kódszónak négy betűje van, mindegyiket kétféleképpen változtathatjuk meg, így egy kódszóhoz önmagával együtt 9 szó tartozik. Mivel összesen $3^4 = 81$ szó van, így legfeljebb $81/9 = 9$ kódszó lehetséges.

Megadunk 9 megfelelő kódszót. Legyen a négy betű sorban x_1, x_2, x_3 és x_4. Válasszuk meg x_1-et és x_2-t az összes lehetséges módon! Ez összesen épp 9 lehetőség. x_3-at és x_4-et számítsuk ki x_1-ből és x_2-ből a 1.2 feladat utolsó megoldása alapján, csak modulo 3 számolva:

$x_3 = x_1 + x_2 \pmod 3$, $x_4 = x_1 + 2 \cdot x_2 \pmod 3$.

Tehát a kódszavak: 0000, 0112, 0221, 1011, 1120, 1202, 2022, 2101, 2210.

Ha kapunk egy négybetűs szót, akkor „betűit" helyettesítsük be a fenti egyenletekbe. Ha mindkettő teljesül, akkor nincs hiba (vagy egy hibánál több van). Ha csak az egyik nem teljesül, akkor annak bal oldala a hibás és kijavítható. Ha egyik se teljesül, akkor x_1 és x_2 egyike a hibás, az első egyenletből kiderül mennyivel, a másodikból, hogy melyik.

4.7 k_1 esetén mindkét jelet jól kell kiolvasni, így $0{,}9^2 = 0{,}81$ alapján 81% az esély.

k_2 esetén mindkét jel három példányából háromnak vagy kettőnek kell helyesen megérkeznie, tehát a számolás:

$$(0{,}9^3 + 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2)^2 = 0{,}944784,$$

azaz 94,4784% az esély.

k_3 esetén a négy jelből négynek vagy háromnak kell helyesnek lennie, így $0{,}9^4 + 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}9477$ alapján 94,77% az esély.

4.8 Az esélyek az egyes esetekben:

k_1: $P_1 = p^2$, k_2: $P_2 = (3p^2 - 2p^3)^2$,
k_3: $P_3 = 4p^3 - 3p^4$.

$$P_2 - P_1 = (3p^2 - 2p^3 - p) \cdot (3p^2 - 2p^3 + p) =$$
$$= (1 - 2p) \cdot p^2 \cdot (p - 1) \cdot (-2p^2 + 3p + 1).$$

Az első tényező határozza meg a szorzat előjelét, mert a (0; 1) intervallumban a második és a negyedik tényező pozitív, a harmadik pedig negatív. (a $p = 0$, $p = 1$ esetekkel itt nem foglalkozunk), így $P_2 > P_1 \Leftrightarrow p < 1/2$.

$P_3 - P_2 = 4 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^3$, tehát a k_3 kód mindig jobb k_2-nél.

$P_3 - P_1 = p^2 \cdot (1 - p) \cdot (3p - 1)$, így $P_3 > P_1 \Leftrightarrow p > 1/3$.

Az összesített eredmény:

p	q	a sorrend
$\left(0,\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},1\right)$	$k_2 < k_3 < k_1$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$k_2 < k_3 = k_1$
$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$	$k_2 < k_1 < k_3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$k_1 = k_2 < k_3$
$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$k_1 < k_2 < k_3$

4.9

szavak hossza (k):	1	2	3	4	5	6
kódszavak száma:	1	1	2	2	4	8

Részletezve: az egyik kódszó legyen a csupa 0 szó. Ezek után minden k-ra külön vizsgáljuk a megoldást. A szó súlyának a benne szereplő 1-esek számát értjük.

$k = 5$: csak két három súlyú, és csak egy-egy négy és öt súlyú szó lehet, de az utóbbi kettő ki is zárja egymást. Így legfeljebb 4 megoldás van, ami lehet is pl.: 00000, 11100, 10011, 01111.

$k = 6$: csak négy három súlyú, és csak három négy súlyú szó lehet. Öt súlyú mellett nem lehet hat súlyú és négy súlyúból is csak legfeljebb kettő. A hat súlyú kizárja az öt és a négy súlyú szavakat is. Így legfeljebb 8 szó lehet. Erre egy példa: 000000, 111000, 100110, 010101, 001011, 011110, 101101, 110011.

A $k = 7$ esetet megoldjuk az 5.9 feladat megoldása közben.

4.10 Bármely két különböző kódszó 16 vagy 32 helyen tér el egymástól. Így 7 bithibáig bármely kódszó kijavítható. Részletesebben lásd [2] 146-147. oldalán.

4.11

a) Ha bármelyik két kódszó minimális távolsága legalább $(2k + 1)$, akkor bármelyik kódszóban k betűt elrontva, attól csak k Hamming távolságra jutunk, míg az összes többitől legalább $(k + 1)$ Hamming távolságnyira leszünk. Így a szó kijavítható.

Ha két kódszó távolsága csak $2k$ lenne, akkor azokat a szavakat nem tudnánk kijavítani, amely a $2k$ hely közül k helyen az egyik kódszóval, k helyen a másik kódszóval, a többi helyen pedig mindkét kódszóval megegyeznek. Ezek a szavak mindkét kódszóból megkaphatók k betű elírásával.

b) Magától értetődő.

c) Használjuk fel a b) állítást! Ha a két kódszó távolsága legfeljebb k, akkor az egyik kódszóból azt a legfeljebb k betűt törölve, ahol különböznek, olyan „szó"-hoz jutunk, amelynek rekonstruálása nem egyértelmű. Tehát k-törlés javító kód minimális távolsága legalább $(k + 1)$.

Ha egy kódszó minden más kódszótól k-nál több helyen eltér, akkor bármelyik k betűjének törlődése esetén sem keverhető össze másik kódszóval. Tehát legalább $(k + 1)$ minimális távolságú kód egyben k-törlés javító.

5. Barkochbák, totók, játékos feladatok

5.1 Négy megoldás is van: 1223, 1313, 1233, 1123.

5.2 Lásd [1] 227. feladatát és megoldását!

5.3 Még a legokosabb gyerekek is „csak" 98 rabot szoktak tudni megmenteni. Tipikus gondolatmenetük: az utolsó jelzése arra utal, hogy az első 98 rab fején levő sapkák közül az egyik (mondjuk a kék) szín paritása milyen, az utolsó előtti pedig egy másik szín (mondjuk a piros) paritására utal.

Valójában 99 rab is megszabadulhat. A sapkák színe helyett használjuk a 0, 1, 2 számokat: legyen pl. kék = 0, piros = 1, zöld = 2. Az utolsó adja össze a többi 99 sapka számát, vegye az összeg hármas maradékát, és mondja ki az eredménynek megfelelő színt. Ennek az információnak a birtokában sorban az összes többi rab kiszámolhatja saját sapkájának színét.

Erre a megoldásra nehéz rájönni, még akkor is, ha a témát alaposan elkészítettük.

5.4 Ilyenkor is megszabadulhat 99 rab.

5.5 *a)* Legfeljebb 9 bástya helyezhető el, hiszen a kocka vetülete bármelyik oldallapon egy 3x3-as négyzet, ahol a bástyák vetületeinek különböző kis négyzetbe kell kerülnie. Az ábrán látható egy példa arra, hogy kilenc el is helyezhető, a számok azt mutatják, hogy a vetület fölötti hányadik szinten van a bástya.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1. ábra

9 szuperbástya a 3 x 3 x 3-as sakktáblában

5.5 *b)* Az a) részhez hasonlóan látható, hogy az n x n x n-es esetben is n^2 a maximum. A feladat kódelméleti vonatkozása a következő: a térbeli tábla mezőit a 0, 1, 2, ..., 7 számokból álló számhármasokkal koordinátázhatjuk; a bástyák pontosan akkor nem ütik egymást, ha a mezőiknek megfelelő „hárombetűs szavak" 1-hiba jelző kódot alkotnak.

5.6 Lásd [1] 225. feladatát és megoldását, illetve itt a 4.6 feladatot!

5.7 $59049 = 3^{10}$. A 5.6 feladat megoldásának mintájára viszonylag egyszerűen adódik, hogy ennyi szelvényre szükség van. Az elégségesség, azaz a konstrukció megértése lényegében a Hamming-kód megértésével ekvivalens. Ennek leírását lásd pl. [2]-ben.

5.8 *a)* Egy-egy kérdés a szóbajövő számok halmazát két részhalmazra bontja: azokra, amelyekre igen a válasz (ha az a szám a gondolt szám) és azokra, amelyekre nem a válasz. „Rossz esetben" olyan választ kapunk, amely azt mutatja, hogy a nagyobb, pontosabban a nem kisebb részhalmazban van a gondolt szám. Ezért, ha biztosra megyünk, nem tehetünk jobbat, minthogy kérdéseinkkel megfelezzük a lehetőségeket. 4 kérdés kell a kitaláláshoz, és ennyi elég is.

b) Most is szükséges a 4 kérdés, és elég is. Ehhez azt kell elérnünk, hogy a következő kérdés az előzőre adott bármely válasz esetén megfelezze a lehetőségeket.

I. konstrukció: Az alábbi megoldás négy kérdése mind így kezdődik: „A gondolt szám az itt megadott halmazban van?". A négy megadott halmaz:

1 2 3 4 5 6 7 8

1 2 3 4 9 10 11 12

1 2 5 6 9 10 13 14

1 3 5 7 9 11 13 15

II. konstrukció Az iménti megoldást a diákok gyakran megtalálják, de ritkán veszik észre, hogy teljesen megegyezik a következővel. Írjuk fel a gondolt számnál eggyel kisebb számot kettes számrendszerben négy jeggyel (pótoljuk az elejét 0-kal, ha szükséges)! Ezek a felírások az alábbi táblázat oszlopaiban láthatók.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
1. sor:	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2. sor:	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3. sor:	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4. sor:	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Kérdéseink:

1. Az így kapott szám balról számított első jegye 0?
2. Az így kapott szám balról számított második jegye 0?
3. Az így kapott szám balról számított harmadik jegye 0?
4. Az így kapott szám balról számított negyedik jegye 0?

A négy válasz alapján megkapjuk a gondolt számnál eggyel kisebb szám kettes számrendszerbeli alakját, így ki tudjuk találni a gondolt számot.

Látható, hogy táblázatunk négy sora megfelel az I. konstrukció négy kérdésének. Az adott sorban az n számnak ($0 \le n \le 15$) megfelelő oszlopban pontosan akkor áll 0, ha az előző megoldás megfelelő kérdésében n benne volt a kijelölt halmazban.

5.9 Alsó korlát *(Juhász Máté Lehel 9-es diák megoldása)*

Tegyük fel, hogy k előre leírt kérdéssel ki lehet találni a gondolt számot. Tekintsük ezt a k kér-

dést, és válasszuk ki a 16 szám egyikét, mintha az lenne a gondolt szám. Válaszoljuk meg a k db kérdést hazugság nélkül. Írjunk 0-t az „igen", 1-est a „nem" válasz helyett. Így egy k hosszúságú 0 – 1 sorozatot kapunk, amit a kiválasztott szám kódjának fogok nevezni. Ha a válaszoló egyszer hazudik, akkor nem a szám kódját kapjuk, hanem egy olyan sorozatot, amely egy helyen különbözik a szám kódjától. Az ilyen sorozatokat a szám *álkód*jának fogom nevezni. Álkódból éppen k darab van, mert a k kérdésből egyre kaphatunk rossz választ, és mindegyik kérdésre egyféle rossz választ kaphatunk. A 16 számhoz 16 kód és 16 k álkód tartozik. Ezeknek mind különbözőeknek kell lenniük, mert ha volna közös elemük, akkor az annak a 0- 1 sorozatnak megfelelő válaszok esetén nem tudnánk kitalálni a gondolt számot. Összesen 2^k darab k hosszú 0 – 1 sorozat van, így biztosan teljesül a

$$16 \cdot (k + 1) \leq 2^k$$

egyenlőtlenség. A két oldal értékét k = 1, 2, ... esetén táblázatban írom fel.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$16 \cdot (k+1)$	32	48	64	80	96	112	128	144
2^k	2	4	8	16	32	64	128	256

Látható, hogy az egyenlőtlenség a $k = 7$ esetben teljesül először. Tehát legalább 7 előre leírt kérdésre van szükség.

5.9 I. konstrukció *(„Mohó algoritmus" Hubai Tamás 9-es diák megoldása alapján)*

7 előre leírt kérdéssel megoldható a feladat. Ennek igazolásához 16 db olyan 7 hosszúságú 0 – 1 sorozatot kell megadni, amelyek közül bármelyik kettő legalább három helyen eltér egymástól. Ebből ugyanis következik, hogy a 16 kód és 16 · 7 álkód mind különböző lesz: ha két különböző kódhoz tartozó álkód megegyezik, akkor a két kód csak két helyen tér el egymástól.

Mohó algoritmussal dolgoztam. A 0000000 sorozattól kezdve a lexikografikusan legkisebb olyan sorozatot kerestem, amelyik mindegyik korábban már kiválasztott sorozattól legalább 3 helyen különbözik. Az eredményül kapott 16 db 0 - 1 sorozat az alábbi táblázat oszlopaiban található:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1. sor:	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2. sor:	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3. sor:	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4. sor:	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
5. sor	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
6. sor	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
7. sor	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1

A 7 kérdés a 7 sorból olvasható ki. Egy oszlophoz tartozó kérdés azokra az 1 és 16 közti számokra kérdez rá, amelyek sorában az adott oszlopban 0 áll. A hét kérdés mindegyike így kezdődik: „A gondolt szám az itt megadott halmazban van?". A hét megadott halmaz az alábbi sorokban olvasható:

1. kérdés: 1 2 3 4 5 6 7 8
2. kérdés: 1 2 3 4 9 10 11 12
3. kérdés: 1 2 5 6 9 10 13 14
4. kérdés: 1 2 7 8 11 12 13 14
5. kérdés: 1 3 5 7 9 11 13 15
6. kérdés: 1 3 6 8 10 12 13 15
7. kérdés: 1 4 5 8 10 11 14 15

Érdekes, hogy a fenti 1., 2., 3., 5. kérdések rendre megegyeznek a 5.8 b) feladatra adott megoldások kérdéseivel.

5.9 II. konstrukció *(„Algebra I.", „Szűcs András 11.-es diák megoldása alapján)*

A 5.8 b) feladatra adott II. konstrukcióra építve az 1.2 feladat VI. megoldásának mintájára dolgozunk. Legyen $(n - 1)$ kettes számrendszerbeli alakja $x_8x_4x_2x_1$ ($n \in \{1, 2, \ldots, 16\}$, $x_i \in \{0, 1\}$). Ebben a megközelítésben az 5.8 b) feladatra adott II. konstrukció kérdései így írhatók:

„$x_8 = 0$?"; „$x_4 = 0$?"; „$x_2 = 0$?"; $x_1 = 0$?"n.

Állítjuk, hogy a jelen feladat megoldását kapjuk, ha a fenti négy kérdést kiegészítjük az alábbi hárommal:

„$x_4 + x_2 + x_1 = 0$?"; „$x_8 + x_2 + x_1 = 0$?";

„$x_8 + x_4 + x_1 = 0$?",

ahol az összeadás és az egyenlőség mindenütt mod 2 értendő. Hogyan lehet eldönteni, hogy

ez, vagy egy ehhez hasonló kérdéssor megfelelő? Próbáljunk arra válaszolni, hogy mikor *nem* megfelelő egy kérdéssor! Akkor, ha lehet olyan válaszokat adni, azaz a kérdésesben foglalt egyenletek jobb oldalainak olyan m_8, m_4, ..., m_{841} bináris értékeket adni, hogy az x_8, x_4, x_2, x_1 bináris változók két különböző megválasztása (x_{81}, x_{41}, x_{21}, x_{11}, illetve x_{82}, x_{42}, x_{22}, x_{12}) esetén is csak legfeljebb egy-egy nem teljesül a megadott

$$\begin{array}{l|l} x_{81} = m_8;\ x_{41} = m_4; & x_{82} = m_8;\ x_{42} = m_4; \\ x_{21} = m_2;\ x_{11} = m_1; & x_{22} = m_2;\ x_{12} = m_1 \\ x_{41} + x_{21} + x_{11} = m_{421}; & x_{42} + x_{22} + x_{12} = m_{421}; \\ x_{81} + x_{21} + x_{11} = m_{821}; & x_{82} + x_{22} + x_{12} = m_{821}; \\ x_{81} + x_{41} + x_{11} = m_{841}. & x_{82} + x_{42} + x_{12} = m_{841}. \end{array}$$

egyenletek közül. Legyen most $\in_1 = x_{11} - x_{12}$, $\in_2 = x_{21} - x_{22}$, $\in_4 = x_{41} - x_{42}$, $\in_8 = x_{81} - x_{82}$, ahol a kivonás és az egyenlőség továbbra is mod 2 értendő. Az egymásnak megfelelő egyenletek kivonása révén könnyen belátható, hogy a kérdéssor pontosan akkor nem megfelelő, ha az $\in_1$, $\in_2$, $\in_4$, $\in_8$ bináris változóknak adható olyan érték, amelyre az

$$\in_8 = 0; \quad \in_4 = 0; \quad \in_2 = 0; \quad \in_1 = 0;$$

$$\in_4+\in_2+\in_1=0; \ \in_8+\in_2+\in_1=0; \ \in_8+\in_4+\in_1=0,$$

összefüggések közül legfeljebb kettő nem teljesül. Esetünkben ez kizárható, mert ha az első négy egyenlet teljesül, akkor az összes többi is; ha csak egy – mondjuk az x_i változót tartalmazó – nem teljesül az első négyből, akkor az utolsó háromból nem teljesül még az x_i-t tartalmazó további két vagy három egyenlet; végül, ha az első négy egyenletből két összefüggés sem igaz, akkor az utolsó háromból sem teljesül még legalább egy, mert ezt a három egyenletet úgy állítottuk össze, hogy bármelyik két változóhoz találhassunk köztük olyat, amelyik az egyik változót tartalmazza, a másikat pedig nem.
Tehát kérdéseink valóban megfelelőek.

Megjegyzés

Mutassuk meg, hogy az I. konstrukcióban megadott kérdések is megfogalmazhatók a II. konstrukcióban adott algebrai alakban!

5.9 III. konstrukció

(„Algebra II.", Hamming kód)

Az I. konstrukció gondolatmenete alapján, de a II. konstrukcióban szereplő algebrai módszerhez hasonló megoldást keresünk. 16 db olyan hét hosszúságú 0 – 1 sorozatot kell megadni, amelyek közül bármelyik kettő legalább három helyen eltér egymástól. Szeretnénk ezeket a sorozatokat egy

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot y_1 & + & a_{12} \cdot y_2 & + \ldots + & a_{17} \cdot y_7 = 0, \\ a_{21} \cdot y_1 & + & a_{22} \cdot y_2 & + \ldots + & a_{27} \cdot y_7 = 0, \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} \cdot y_1 & + & a_{k2} \cdot y_2 & + \ldots + & a_{k7} \cdot y_7 = 0, \end{array}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként előállítani. (Itt a +, · műveletek és az egyenlőség is mod 2 értendő.) Feltételi egyenlet nélkül az y_1, y_2, ... y_7 bináris változók értékei 2^7-féleképpen választhatók meg, hiszen mind a hét változó szabadon és egymástól függetlenül fölveheti a 0, 1 értékek bármelyikét. Egy egyenlet lehetőséget ad, hogy az egyik változót kifejezzük a többiből, így a szabad változók száma eggyel csökken. Azt szeretnénk elérni, hogy az egyenletrendszernek $16 = 2^4$ megoldása legyen, ehhez 3 (független) egyenletet kell megadni ($k = 3$). Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{37} \end{pmatrix}$$

mátrixba foglalt bináris paraméterek olyan értékeit keressük, amelyek esetén a (2.7) egyenletrendszert kielégítő y_1, y_2, ..., y_7 bináris sorozatok közül bármelyik kettő legalább három helyen eltér egymástól.

Ha a (2.7) egyenletrendszernek megoldása az (y_{11}, y_{21}, ..., y_{71}) és az (y_{12}, y_{22}, ..., y_{72}) bináris sorozat is, akkor megoldása az ($\in_1 = y_{11} - y_{12}$, $\in_2 = y_{21} - y_{22}$, ..., $\in_7 = y_{71} - y_{72}$) sorozat is. A (2.7) egyenletrendszer tehát pontosan akkor megfelelő, ha (egyenletei függetlenek és) nincs olyan megoldása, amelyben az ismeretlenek közül egynek vagy kettőnek az értéke 1-es (és a többi 0).

$y_1 = 1, y_2 = \ldots = y_7 = 0$ pontosan akkor megoldása a (2.7) egyenletrendszernek, ha az A mátrix első oszlopában mindenütt 0 áll. Általában, (2.7)-nak pontosan akkor van olyan megoldása, amelyben az egyik változó értéke 1, a többié 0, ha A-nak van azonosan 0 oszlopa. $y_1 = y_2 = 1, y_3 = \ldots = y_7 = 0$ pontosan akkor megoldása a (2.7) egyenletrendszernek, ha az A mátrix első két oszlopa egyenlő egymással. Általában, (2.7)-nak pontosan akkor van olyan megoldása, amelyben két változó értéke 1, a többié 0, ha A-nak van két egyforma oszlopa. Az A mátrix tehát pontosan akkor ad megfelelő egyenletrendszert, ha egyik oszlopa sem egyezik meg az azonosan 0 oszloppal vagy egy másik oszloppal (és az egyenletek függetlenek).

A egy-egy oszlopa egy három elemből álló bináris sorozat, amely $2^3 = 8$ féleképpen választható meg. Ezek közül az egyik azonosan 0, tehát A oszlopai az elmondottak szerint – a sorrendtől eltekintve – egyértelműen meghatározottak:

$$\begin{pmatrix} 1110100 \\ 1101010 \\ 1011001 \end{pmatrix}$$

Tehát a megfelelő (2.7) alakú egyenletrendszer:

$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 1 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 = 0,$

$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 1 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 = 0,$

$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 + 1 \cdot y_7 = 0,$

Ennek valóban 16 megoldása van (azaz egyenletei függetlenek) hiszen y_1, y_2, y_3, y_4 értékei szabadon választhatók és

$$y_5 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4,$$

$$y_6 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4,$$

$$y_7 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4.$$

A 16 megoldás itt látható:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$y_1 =$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$y_2 =$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$y_3 =$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$y_4 =$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$y_5 =$	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
$y_6 =$	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$y_7 =$	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1

Látható, hogy – két sor felcserélődésétől eltekintve – ugyanahhoz a táblázathoz jutottunk, mint az I. konstrukció esetén.

Megjegyzés

A feladat megoldása közben megoldottuk a 4.9 feladatot $k = 7$ esetére is. Kétféle betű alkalmazásával létrehozott hétbetűs 1-hiba javító kód legfeljebb 16 kódszóból állhat.

5.10 Öt kérdés nyilván szükséges, de ennyi elég is. Öt megfelelő kérdés megkapható az 5.9 feladatra adott I. vagy akár a II. konstrukció mintájára.

Most 16 db olyan 5 hosszúságú 0-1 sorozatot keresünk, amelyek közül bármelyik kettő legalább két helyen eltér egymástól. Ha ugyanis az egyik kérdésre nem érkezik válasz, azaz a sorozatokban az egyik helyen álló elem eltűnik, akkor továbbra is 16 különböző sorozatot kell kapjunk. Ez felel meg annak, hogy a négy megmaradt kérdésre adott válaszból minden esetben kitalálható a gondolt szám. Az alábbi táblázat oszlopaiba 16 megfelelő sorozatot írtunk be.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1. sor:	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2. sor:	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3. sor:	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4. sor:	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
5. sor	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Látható, hogy az utolsó sor az előzőekhez hozzátett paritásjelző-bit. Az öt kérdés közül az első négy megegyezik a 5.8 b) feladatban adott négy kérdéssel, az ötödik pedig azokra a számokra kérdez rá, amelyekre addig páratlan sokszor kérdeztünk rá. Így összességében minden számra páros sokszor kérdezünk rá, tehát ha mind az öt kérdésre kapnánk választ, akkor páros sok „Igen"-t hallanánk. Ezért, ha egy válasz hiányzik, akkor az már kitalálható a többi négyből.

Megjegyzések

1. Az 5.9 feladatra adott II. konstrukció szellemében fenti kérdéseink így is írhatók:

„$x_8 = 0$?"; „$x_4 = 0$?"; „$x_2 = 0$?"; „$x_1 = 0$?";

„$x_8 + x_4 + x_2 + x_1 = 0$?".

2. Táblázatunk oszlopai most egy 16 kódszóból álló ötbetűs 1-törlés javító kódot alkotnak.

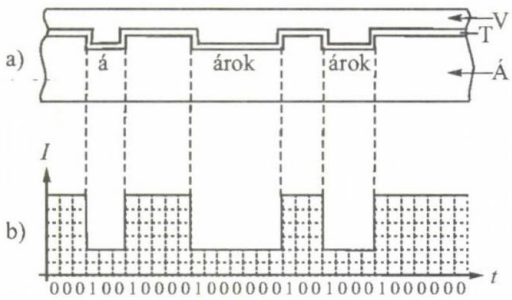
5.11 Lásd az [2] 155-156. oldalán található megoldást!

A CD matematikája

1. A pálya

A kompakt lemezről szóló fejezet anyagát nagyrészt a [3], [4] művek alapján állítottuk össze.

A CD lejátszót a Philips és a Sony cég fejlesztette ki. Maga a lemez egyetlen egy pályából áll, ami 5 km hosszú. Ezen binárisan van tárolva az információ. „Síkságok" és „árkok" követik egymást, de az árok alja is sík. Az 1-es bitet a változás, az árok széle, a 0-át az egységnyi hosszúságú vízszintes rész jelöli, amely lehet síkságon vagy az árok alján is (lásd az 2. ábrát).



2. ábra

a) A CD lemez keresztmetszete a pálya irányában V: védőréteg; T: tükrözőfelület; Á: átlátszó réteg. b) I Az optikai olvasófej által érzékelt jel intenzitása az idő (t) függvényében.

A kódolt üzenetnek nagyon sok feltételt tudnia kell:

1. A digitalizálás ellenére az emberi fül számára hűen adja vissza a felvett zenét;
2. Az elszórt véletlenszerű bithibákat képes legyen kijavítani;
3. A csomóban keletkező hibák – ujjlenyomatok, karcolások, anyaghibák korrigálását is megoldja;
4. A hallgató számára információt tudjon nyújtani arról, hogy hol tart;
5. A lézeres leolvasószerkezet hatékonyan tudja olvasni az információt;
6. A szerkezet működése ne keltsen az emberi fül számára hallható zajt (a lejátszandó zenén kívül).

2. Audiobit

A zene felvételekor az érzékelő bizonyos időnként „mintát vesz", azaz egy-egy pillanatban megméri, milyen a beérkező hullám nyomása. Lényegében ez az érték a tárolt információ. A felvétel lejátszásakor keletkező hang a pillanatnyi minták visszaadásából áll össze, így természetesen nem pont ugyanaz, mint amit fel szándékoztak venni. A mintavételezés gyakoriságától függően a zenei hang bizonyos hullámhosszú összetevői hűen hallhatók. Egy fizikai elv, Nyquist tétele, kapcsolatot teremt a mintavételezés gyakorisága, és az abból hűen rekonstruálható hanghullámok frekvenciája között. Ennek a tételnek az alapján és abból kiindulva, hogy az emberi fül kb. 20 000 Hz-ig hall jól, másodpercenként 44 100-nak adódik a szükséges mintavételezési gyakoriság.

Minden minta eredményét 16 bitté alakítja a rendszer. A felvétel általában sztereó, így máris 32 bit – úgynevezett *audiobit* – tartozik egyetlen pillanatnyi mintához. A 32 bit 4 byte-ba van rendezve (egy byte nyolc egymást követő bit).

3. 2-hiba javító kód

Ha a felvett audiobitekhez nem volnának hozzátéve hibajavító kódok, akkor a CD lemez lejátszhatatlan minőségű lenne. A leggyakoribb „károkozók" az ujjlenyomatok, az apró karcolások, a lemezben vagy rajta lévő idegen anyagok, a műanyagban óhatatlanul meglévő légbuborékok, az eredeti felületi egyenetlenségek és a felvételkor vétett pontatlanságok.

Tegyük fel, hogy nem alkalmazunk hibajavító kódot. Ha a byte-hiba valószínűsége csupán

0, 01% lenne, akkor az egy mintavételnek megfelelő információban, azaz 4 byte-ban megbúvó hiba esélye

$$1 - 0,9999^4 \approx 0,9996$$

alapján kb. 0, 04%-os lenne. Ez másodpercenként több, mint 17 hibás lejátszott hangot okozna.

Tegyük fel először, hogy csak 1-hiba javítást alkalmazunk. A CD-n használt Reed-Solomon-féle kódolási eljárás egy-egy byte-ot egyben, egyetlen „számként" kezel. Ennek részleteibe most nem megyünk bele, inkább egyszerűsítésként képzeljük azt, mintha egy byte-on csak 31-féle információ lenne szállítható. Feleltessünk meg minden lehetőségnek egy 0 és 30 közötti számot és számoljunk velük mod 31.[1]

Az 1-hiba javítás megoldható úgy, hogy minden mintavételnek megfelelő byte-négyeshez még 2 byte-ot veszünk hozzá. Az R-S kódolás ezt az 1.1 feladathoz kicsit hasonlóan oldja meg. Az x_1, x_2, x_3, x_4 eredeti byte-ok mellé az x_5 és x_6 ellenőrző biteket úgy kell választani, hogy teljesüljön az alábbi két összefüggés:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \equiv 0 \pmod{31},$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 \equiv 0 \pmod{31}.$$

Ha a dekódolásnál kiderül, hogy nem teljesül ez a két összefüggés, mondjuk a felső bal oldali kifejezés értéke 2, az alsóé pedig 41, azaz 10 (mod 31), akkor – abban bízva, hogy csak 1 hiba történt – kiszámolhatjuk a kódolt információt. Tudjuk, hogy a hiba értéke 2, tehát azt kell megkeresnünk, hogy melyik 1 és 26 közötti szám kétszerese ad 10 maradékot 31-gyel osztva. Ez a szám az 5, tehát az x_5 byte hibás, 2-vel nagyobb a kelleténél (mod 31).

Nézzük, most mennyi hibára számíthatunk! Sajnos azzal, hogy megnöveltük a bitsorozat hosszát, vagy kevesebb zenét kell rögzítenünk a lemezen, vagy kisebb jeleket sűrűbben kell írnunk a CD-re, ami növeli a hiba valószínűségét. Az első lehetőséget ne fogadjuk el. Tegyük fel, hogy a byte-hiba valószínűsége 0, 02%-ra nő. Annak esélye, hogy egy mintavételnek megfelelő, most már 6 byte-ból álló adatsor hibás lesz, tehát 2 hiba kerül bele:

$$1 - 0,9998^6 - 6 \cdot 0,0002 \cdot 0,9998^5 \approx 0,0000006.$$

Ez másodpercenként csak átlagosan kb. 0,0264 hibás lejátszott hangot okozna, ami lényegesen jobb, mintha nem alkalmaztunk volna kódolást.

Egy, az előzőnél jobb, két hibát javító kóddal még sokkal jobb eredményt érhetünk el. Most byte-négyesek helyett byte-ok nyolcas csoportjaira osztjuk a kódolandó üzenetet, és ezekhez négy további byte-ot illesztünk. Nevezetesen, az eredeti byte-oknak megfelelő 8 szám legyen x_1, x_2, ..., x_8, a négy ellenőrző szám pedig x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}. Szabályaink legyenek

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{31},$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + 11x_{11} + 12x_{12} \equiv 0 \pmod{31},$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + \ldots + 121x_{11} + 144x_{12} \equiv 0 \pmod{31},$$

$$x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 + \ldots + 1331x_{11} + 1728x_{12} \equiv 0 \pmod{31},$$

Annak részletes vizsgálatát, hogy így 2-hibajavító kódot kapunk, feladatnak hagyjuk. Jegyezzük meg, hogy ebben az esetben is csak másfélszer annyi üzenetet kell átküldenünk, mint kódolás nélkül. Ha tehát itt is a 0, 02%-os hibájú berendezést használjuk, akkor a legalább 3 hibát tartalmazó csoportok lesznek azok, amelyeket nem tudunk javítani. Ennek valószínűsége

[1] *Az egyszerűsítésre azért van szükség, mert a természetesen adódó mod 256 számolás ($256 = 2^8$) esetén az osztással baj van, pl.: a 2 fele az 1 és a 129 is, a 3-nak viszont nincsen fele. Lehet a 256 elemű halmazon úgy értelmezni az alapműveleteket, hogy ne forduljon elő hasonló probléma, de ennek tisztázása túlnövi a cikk kereteit.*

$$1 - 0{,}9998^{12} - 12 \cdot 0{,}0002 \cdot 0{,}9998^{11} - $$
$$- 66 \cdot 0{,}0002^2 \cdot 0{,}9998^{10} \approx 0{,}000000002.$$

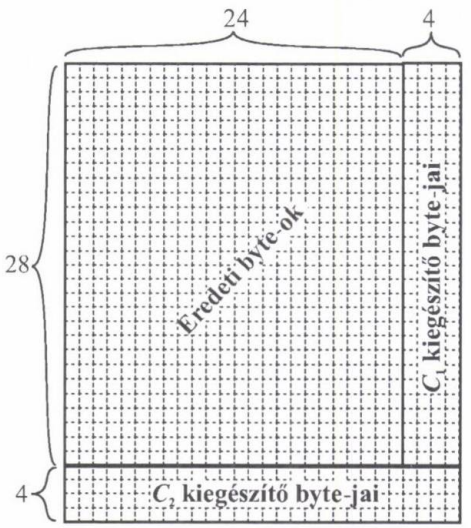
Ha úgy számolunk, hogy ilyenkor a 8 byte-hoz tartozó mindkét hang rossz, akkor is másodpercenként átlagosan csak kb. 0,0000774 hibás lejátszott hangot kapnánk, az egy órányi zene alatt összesen 0, 28-at. Ez már elfogadható eredmény.

Lényeges, hogy a CD-n olyan kódot használjunk, amely a lehető legkisebb arányban növeli meg az adatsor hosszát, és nagyon gyorsan dekódolható.

4. „Keresztbe font" kódok

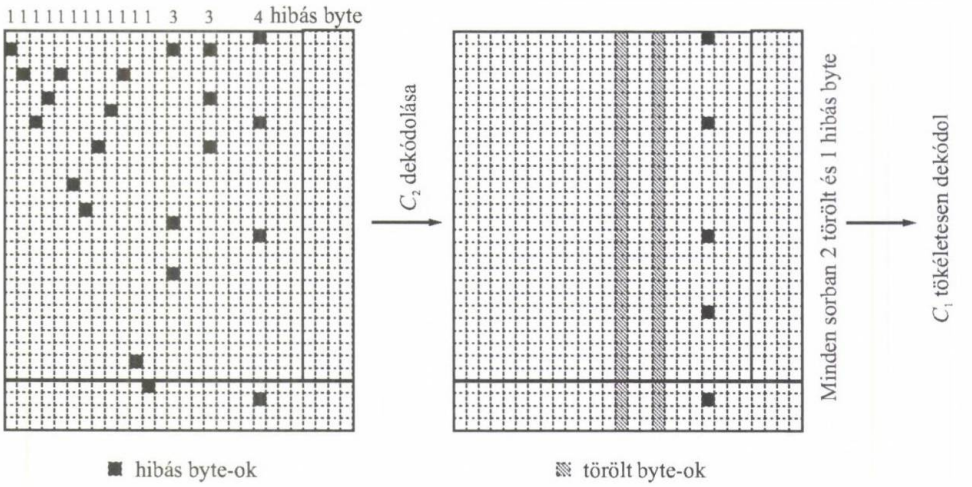
Eddig csak a véletlenszerű, elszórt hibák kiszűréséről volt szó. Sajnos, a hibák jelentős része csomóban jelentkezik. Ezek ellenében a CD-n két „keresztbe font" (Cross-Interleaved) Reed-Solomon kód biztosítja az információ megmaradását.

Ez egyrészt azt jelenti, hogy az egymáshoz kapcsolódó információk a lemez különböző helyein vannak elhelyezve, az egymás mellé kerülő jelek pedig a lejátszandó zenében valójában egymástól nagyobb időkülönbséggel következnek. Így a hibafolt ugyan több információba „belepiszkít", de mindegyikbe csak egy picit.



3. ábra
Keresztbefont kódok

A másik trükk az, hogy a két kódolás az alábbi táblázatos formához hasonló módon működik együtt (lásd a 3. ábrát). Az első, C_1 kód 24 byte-ot kezel együtt, ezekhez 4 byte-ot



4. ábra
Keresztbefont kódok dekódolása

tesz hozzá 2-hiba javító módon, tehát a létrejövő 28 byte-os kódszavak minimális távolsága 5 lesz. Rendezzünk el 28 ilyen, már C_1-gyel kódolt 28 byte-os adatsort egy táblázat soraiban! A második, C_2 kód 28 byte-ot kezel együtt, a táblázat minden oszlopát további 4 byte-tal egészíti ki 2-hiba javító módon, tehát a létrejövő 32 byte-os oszlopkódok minimális távolsága 5 lesz.

A két kód alkalmazásával lényegében egy 24 x 28-as táblázat adatait kódoltuk át egy 28 x 32-es táblázattá. Bebizonyítható, hogy az így létrejövő táblázatok minimális távolsága 25, tehát a kettős kód alkalmas a 28 x 32 adatban keletkező 12 hiba kijavítására.

Képzeljünk el egy ennél sokkal rosszabb esetet, amikor 22 hiba van a táblázatban: tizenkét oszlopban 1-1 hiba, két oszlopban 3, egyben pedig 4 hiba is előfordul (lásd a 4. ábrát). Nem várható el, hogy ki tudjuk javítani a hibákat, hiszen az oszlopok 2-hiba javítása után még elképzelhető, hogy marad sor 3 hibával. Úgy döntünk, hogy a C_2 kódot a dekódolásnál csak 1-hiba javításra használjuk. Fel tudjuk ismerni a 3 hibát tartalmazó oszlopokat, mert azok legalább 2 távolságra vannak a legközelebbi kódszótól. Könnyen elképzelhető viszont, hogy a 4 hibát tartalmazó oszlop csak 1 távolságra került egy kódszótól, így azt „kijavítjuk" 5 hibásra. A trükk az, hogy kijavítjuk (legalábbis így képzeljük) az 1 hibát tartalmazó oszlopokat, azokat viszont, amelyekről látjuk, hogy ennél több hibát tartalmaznak csak megjelöljük, hogy „törlendő", ne vegyék figyelembe. Korábbi feladatainknak nyelvén a „hazugságot" „hanyagsággá" változtatjuk. Ez azt jelenti, hogy a 32 oszlopból C_2 dekódolása után 29 jó, 2 törlendő, 1-ben pedig 5 hiba is van. Nézzük most a sorokat, amelyeket C_1-gyel kódoltunk! Mindegyikben 2 jel törölve van, öt sorban pedig van egy-egy hibás is. Mivel C_1 minimális távolsága 5, így mindegyiket ki tudja javítani.

Mégis előfordulhat, hogy a dekódoló észreveszi a hibát, de nem tudja kijavítani. Ez a helyzet pl. akkor, amikor túl sok legalább 2-hibás oszlop van. Ekkor a C_2 dekóder végül is a „törlendő" jelet mellékeli jónéhány byte-hoz. A dekóderből kimenő byte-ok még mindig nem a lejátszás sorrendjében következnek egymás után, hanem összefonódva. A visszarendezéskor az „épségben" lévő társai közé érkező „törlendő" byte helyettesíthető szomszédai átlagával. Ilyen interpolációval, ami szukcesszíven is alkalmazható, elérhető, hogy ahelyett, hogy „mute"-ra kapcsolna a zenegép, egy-egy pillanatban amolyan „kitöltő" hangot ad. Ez, ha tényleg csak pillanatokról van szó, valószínűleg észre sem vehető.

A csomóhiba maximális hossza, amit a dekódolással még ki tud javítani a rendszer, 4000 adatbit. Tehát ha ennyi egymást követő bit elromlik, akkor azt nem fogjuk észrevenni. Ez a discen 2,5 mm-nyi torzulást jelent a pálya irányában. Az interpoláció segítségével pótolható egybefüggő bitsorozat maximális hossza 12 000.

5. A barázda-jelek

Láttuk, hogy a mintavételből keletkező byteok 24-es csoportját az egyik kód 28, majd a másik 32 byte hosszúságúra növeli. (A „keresztbe fonás" miatt ez ennél valamivel bonyolultabb, csak a számarányok tekintetében pontos a megállapítás.) A 32 byte-hoz hozzátesznek egy 33.-at, egy kontroll byte-ot, amely lehetővé teszi, hogy tudjuk, hogy hol tartunk.

Az így kapott adatsor nem alkalmas arra, hogy a „síkságok" és „árkok" módszerével az anyagba vive, azt a lézer olvasófej biztonságosan ki tudja olvasni. Az árok mélysége és a síkság magassága úgy van beállítva, hogy az árokból sokkal kisebb intenzitású fény verődik vissza

a leolvasófejbe, mint a síkságról. Az egymáshoz túl közeli 1-esek, tehát közeli falak, olyan interferenciát okoznának, amely megzavarná a leolvasást. A túl távoli falak esetén nagy a bizonytalanság, hogy pontosan mennyi ideje tart a lapos rész, hány 0-t jelent ez. Ilyen megfontolások alapján a lemezen olyan jelsorozatokat érdemes tárolni, amelyben két 1-es között legalább két, de legfeljebb tíz 0 van. Az ilyen elrendezésű jelsorozatok a barázda-jelek (channelbits). A byte-ok 256 lehetséges értékét hány barázda-biten lehet tárolni? Ennek meghatározásához a mérnököknek az alábbi feladatot kellett megoldaniuk:

Ha F_n az *n hosszúságú barázda-jelek száma, akkor melyik az a legkisebb n érték, amelyre* $F_n > 256$?

A helyes eredmény 14. Tehát a byte-okat 14 bitre bővítik. Ez az eljárás az EFM átalakítás (Eight-to-Fourteen Modulation). Problémát okoz, hogy két szomszédos barázda-jel együtt már nem feltétlenül teljesíti a barázda-jelekre kirótt követelményeket. Segítséget jelent viszont, hogy F_{14} értéke 267, tehát 11 darab 14 hosszúságú barázda-jel kidobható. 10-et azért hagytak ki, mert „nem jöttek volna jól ki a szomszédaikkal", 1-et pedig véletlenszerűen választottak. Ezután az EFM átalakítást úgy tervezték meg, hogy a szükséges logikai kapuk száma minimális legyen.

Az egymás mellé kerülő barázda-jelek problémáját nem teljesen oldotta meg a 10 kellemetlen sorozat kidobása. További 3-3 bitet kellett berakni a byte-oknak megfelelő 14 hosszúságú bitsorozatok közé. A 3 bit egy kicsit túlbiztosított. Beállításukkor arra is törekednek, hogy a pálya kezdetétől a síkságok és az árkok hosszának különbsége minél kisebb legyen. Az ezt a különbséget leíró hullámszerű függvényt ugyanis a berendezés „érzi": annak megfelelő zaj indukálódik a berendezésben. Ebből ki kell küszöbölni az emberi fül számára hallható nagyobb amplitúdójú komponenseket, tehát minél kisebb kitéréseket kell elérni.

Végül a 33 byte-ból adódó 33 x 17 bit után 27 szinkronizáló bit jön. Ez a 27 bitsorozat nem keverhető össze a kódolt zenével, csak arra szolgál, hogy az egyik 33-as egység végét, a következő kezdetét jelölje. Mindebből kiszámolható, hogy egyetlen másodpercnyi zenét 4 321 800 biten tárol a CD.

A téma szakköri feldolgozásának internetes anyaga elérhető a fazekas.hu/~hraskoa honlapon.

Irodalom

[1] Fazakas Tünde és Hraskó András, Bergengóc példatár 2., Typotex Kiadó, 2001.

[2] Hraskó András és Szőnyi Tamás, Hibajavító kódok, az Új matematikai mozaik című kötet 139-170. oldalain, Typotex Kiadó, 2002.

[3] J. H. van Lint, The Mathematics of the Compact Disc, DMV Mitteilungen 4/98, 25-29.

[4] Compact disc digital audio, Philips technical review, Vol. 40, 1982, No. 6.

[5] Hämäläinen, I. Honkala, S. Lytsin, P. Östergøard, Football Pools – A Game for Mathematicians, American Math. Monthlg, August-Sept 1995, 579-588.

[6] Györfi László, Győri Sándor és Vajda István, Információ és kódelmélet, Tgpotex Kiadó, 2000.

[7] Claude E. Shannon és Warren Weaver, A kommunikáció matematikai elmélete, Országos Műszaki Információs Központ és Könyvtár, 1986.

[8] Fritz József, Bevezetés az információelméletbe, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1971.

[9] Simon Singh, Kódkönyv, Park Könyvkiadó, 2000.

Dr. Pálfalvi Józsefné

Beszámoló a Varga Tamás Módszertani Napokról (2002. november 8-9.)

Immár 14. alkalommal tartottuk meg a Varga Tamás Módszertani Napok konferenciát. Az ELTE TFK Matematika Tanszék és a Bolyai János Matematika Társulat rendezvénye az idén is bebizonyította, hogy ez a rendezvény méltó a matematikatanítás szakembereinek kitüntető figyelmére, érdeklődésére. A konferencia szerepelt az MTA Tudomány Napja rendezvénysorozatában is.

Új volt a helyszín: az ELTE Lágymányosi Déli épülete, hiszen a TTK-val együtt ide költözött a Tanárképző Főiskola több tanszéke is, köztük a konferencia házigazdája, a TFK Matematika Tanszéke.

A tartalmi, szerkezeti, szervezési szempontokban igyekeztünk a már korábban kialakult és megszokott hagyományokat követni, de néhány újdonságról is beszámolunk.

A hagyományoknak megfelelően külföldi professzor tartotta 8-án pénteken délután a nyitó előadást, amely nagy sikert aratott, nemcsak a matematika, hanem a nyelvészet iránt érdeklődők körében is.

Prof. Waclaw Zawadowski (Varsó): Ways of analysing discourse in mathematics education: metaphors, metonymies, procepts and language games of Ludwig Wittgenstein. A tolmács szerepét – mint már sokszor – Szendrei Julianna vállalta. Zawadowski professzor jól ismerte Varga Tamást, már 1993-ban is résztvett konferenciánkon, Varga Tamás külföldi munkatársai közül elsők között vállalta a megemlékező előadást.

A nyitó előadás után két szekcióban folytatódott a rendezvény. Az angol nyelvű szekcióról részletesen beszámolt Munkácsy Katalin:

2002-ben másodszor szerveztük meg az angol nyelvű szekciót a Varga Tamás Módszertani Napok keretében a Bolyai Társulat és az ELTE TTK Matematika Szakmódszertani Csoport támogatásával, hogy kutatásaikról angol nyelven számolhassanak be a fiatal kutatók.

Az elmúlt évi szereplők elvitték a konferencia hírét, újból jelentkeztek előadók a debreceni matematika-pedagógiai doktori iskolából, informatikus mérnökök Veszprémből és további előadók.

A szekció vezetését az eredetileg felkért Francis Chalmers betegség miatt nem tudta elvállalni. Köszönet Prof. W. Zawadowskinak, aki a nyitó előadás megtartása után nemcsak a szekcióvezetést vállalta, hanem befejezésül rövid előadást is tartott a varsói doktori iskoláról, bemutatott néhány érdekes kutatott problémát és felajánlotta a további együttműködés lehetőségét.

A szekció magyar vezetője idén is Ambrus András volt, aki a tudományos konferenciák légkörét teremtette meg az előadások bevezetésével, az azokat követő, a kutatások lényegét érintő megjegyzéseivel, kérdéseivel.

Az előadásokat három nagyobb témakör köré csoportosítottuk:

– multimédiával kapcsolatos előadások,

– matematikatanítási előadások,

– matematikatörténeti előadások és poszterek.

Az előadások stílusa, műfaja a választott témától, a kutatás jelenlegi állásától, az előadók

személyétől, a nyelvtudás színvonalától, az alkalmazott prezentációs technikától függően eltérő volt, de mind felkeltette a hallgatóság érdeklődését, felvillantotta a későbbi együttműködés lehetőségét. Találkoztak olyan kutatók is, akik közeli témában végzik vizsgálataikat, de eddig nem tudtak egymásról. Nagy érdeklődéssel vártuk amerikai, de itt tanuló vendégünk előadását is, ami szintén a jövő évre halasztódott az épület egyes kapuinak váratlan bezárásából származó gondok miatt.

Jelen voltak kísérőként témavezetők is és hasonló témákban kutató, most még nem szereplő, de azt a következő évben tervező fiatalok is.

A szekció munkája igen sikeres volt, szeretettel várjuk a jövő évi jelentkezéseket.

A másik szekciót A fogalomalkotás élménye címmel hirdettük. Mindkét előadás – Pintér Klára: Taxigeometria és Lénárt István: Járható út tizenéveseknek a Bolyai geometriához – érdekes és szép példát mutatott arra, hogy a tizenéveseket is lehet érthetően, meggyőzően megismertetni a megszokott és természetesnek elfogadott, az euklideszi alapfogalmak illetve axiómák megváltoztatásával alkotott geometriák alapelemeivel.

Ez a szekció képezte az ezzel a címmel tartott előadássorozat befejező programját, melyet az egy éve alakult Varga Tamás Módszertani Központ hirdetett meg az előző konferenciát követő évre. Ehhez az előadássorozathoz csatlakozott Az élmény a matematika óra című pályázat, amelynek legsikeresebb pályázói a konferencia megnyitásának résztvevői előtt vehették át jutalmukat.

A konferencia második napján, nov. 9-én szombaton reggel a plenáris előadást Somfai Zsuzsa tartotta, Mennyire kell törődnünk a tanításunkban a mérési eredményekkel? címmel. Világos, meggyőző érveléssel bizonyította, hogy a PISA felmérésben mutatott gyenge eredményeink nem mondanak ellent a magyar matematikatanítás hagyományos értékei megőrzésének, de kétségtelen, hogy az újonnan felmerült problémák és a hazai és nemzetközi változó körülmények szükségessé teszik a magyar matematikatanítás alapos, sokoldalú elemzését.

Ezután három szekcióban folytatódott a konferencia programja.

Az A szekcióban a matematika tanárképzéshez kapcsolódó témákról hallottunk tartalmas, érdekes, figyelemfelkeltő előadásokat különböző tanárképző intézmények kimagasló szakmai felkészültségű és pedagógusi elhivatottságú oktatóitól. Az alábbi sorrendben:

- Sinikka Raty-Záborszki (Joensuu, Finland) Összehasonlító kutatások a magyar és a finn matematika-tanításról
- Szeredi Éva: Környezeti nevelés a matematikaórán
- Szendrei Julianna: Tanítunk-e tankönyvet választani? (Fogalmi építkezés a tankönyvekben)
- Szalay István: A 3dimenziós euklideszi tér kockamodellje
- Pintér Klára: Felmérés a problémamegoldó képesség vizsgálatára
- Czeglédy István: A TDK helye és szerepe a módszertani kutatásokban
- Korreferátumok: Takács Judit tanár és Bakos Zsuzsa IV. évfolyamos hallgató
- Kántor Sándorné: A 2002. évi matematika érettségi-felvételi feladatok tanulságairól

A B szekció első előadásán Oláh Vera beszámolt arról a most folyó EU pályázatról, amely hét ország közreműködésével hétnyelvű matematikai tezauruszt hoz létre az interneten, bárki számára könnyen alkalmazhatóan. Waclaw Zawadowski professzor az asztal köré ültette a workshop résztvevőit, akiknek bemutatta, hogyan lehet játékos formában megszerettetni

a térgeometriát: nem kell más, csak néhány A4-es papír és egy olló meg egy kis ügyesség. Lénárt István viszont most egyáltalán nem játszott: igencsak figyelnie kellett a hallgatóságnak, hogy a gömbi merőlegesség axiomatikus felépítését, és annak meglepő végeredményét megértse.

Holló-Szabó Ferenc, A megtapasztalt matematika című előadása nemcsak a gondolkodásban, hanem a jól használható és viszonylag könnyen elkészíthető eszközök használatában várt el együttműködést a résztvevőktől, akik örömmel figyelték az előadóban létrehozott matematikai „csodák palotáját".

A C szekcióban került sor Emese György, Új módszerek a matematika tanításában – a grafikus kalkulátorok használatának gyakorlata című előadására. A konferencia résztvevői a rendezvény mindkét napján megtekinthették a Texas Instruments kiállítását. Tartalmában és formájában is újszerű volt Török Turul és Pusztai Kinga, Problémamegoldás 10-18 éveseknek. Indák (spirálok) – ami a LOGO-n túl van című előadása. A felvetett problémákkal, a párbeszédes előadásmóddal kívánták a hallgatóságot minél jobban bevonni a feladatok megoldásába. Ez a program „Varga Tamás típusú" példát kívánt mutatni arra, hogyan lehet egy témát a korosztályok igen széles skáláján (10-18 évesig) eredményesen feldolgozni. Tetszettek a látványos, szép képek, a számítógép alkalmazása itt igazán helyénvaló volt.

15 órától ismét közös programmal folytattuk a konferenciát, a hagyományos fórumnak most a tanárképzés volt a fő témája.

A vitavezető, Pálfalvi Józsefné a következő kérdés-válasz sorozattal próbálta a résztvevőket szóra bírni:

Kérdések

– Mi határozza meg a tanárképzés tantervét, módszereit, struktúráját?

– Szigorítsuk a felvételt vagy bővítsük a kereteket?

Ellentétes vélemények

A tananyag hosszú évtizedek alatt kristályosodott ki, a képesítési követelményeket ma is a hagyomány és a megszokás alapján állították össze.

Gyökeres változásra van szükség, az új társadalmi és nemzetközi követelményekből kell kiindulni.

Minél több mindent tanítsunk meg a hallgatóknak, mert tanárként már csak felejtenek.

Nem a képzés anyaga a fontos, mert úgyis csak a gyakorlat során szerezhetik meg a szükséges ismereteket.

Nincs szükség már a „tudós tanárra", a jövőben úgysem a tudományt, hanem az információszerzést kell megtanítani.

A sokoldalúan képzett, szilárd ismeretekkel rendelkező tanár könnyen tud alkalmazkodni a kor követelményeihez.

A matematikát kell jól tudni, a szilárd matematikai tudás magával hozza a megfelelő módszereket.

A gazdag módszertani kultúra a fontos, mert azt bármilyen témakörben alkalmazhatja a tanár.

Pedagógusnak születni kell!

A tanári mesterség megtanulható!

A szaktárgyakat a tanárképzés minden szintjén mindenkinek egyformán meg kell tanulnia. A pedagógiában és módszertanban kell érvényesíteni a különböző korosztályi követelményeket. Még az alapozó tárgyakat sem lehet egyformán tanítani a különböző szintű tanárképzésben.

A diplomás tanárok nagy része pályaelhagyó, tehát gazdaságossági okokból csökkenteni kell a tanárképzés létszámát.

A tanárképzés (különösen a kétszakos) olyan tudást nyújt (viszonylag olcsón), amelyre sok szakterület alapozható.

A vitában részt vettek alsó tagozatos tanítók, általános és középiskolai tanárok, tanárképző

főiskolai és egyetemi oktatók. A hozzászólások a tanárképzés sok területét érintették.

Ezek közül talán a legfontosabbak voltak a következők:

Felmerült a módszertani tárgyak és a szakmai tárgyak aránya, súlya, elrendezése a képzési folyamatban, ezek különféle megvalósítása a tanárképzés különböző szintjein.

Többen az iskola új szerepéről, feladatköréről vitatkoztak, hogyan egyeztethető össze a hagyományos értékek megőrzése az új kor követelményeinek megfelelő „szolgáltató" iskolával, mindez hogyan jeleníthető meg a tanárképzésben.

A kérdések, vélemények egy része kapcsolódott a délelőtti előadásokhoz, például fontos új szempont, hogyan készítsük fel a tanárokat a tankönyvek megfelelő kiválasztására, mik azok a témák, amelyek segítségével a matematika tanításában hatékonyan megjeleníthető a minket körülvevő valóság, a matematika hasznossága a matematika szépségével és tudományos igényességével összhangban.

A fórumon megfogalmazódott az a vélemény, hogy a magyar matematikatanítás hagyományos jó eredményeinek fontos tényezője az az iskolai struktúra, amelyben biztosítva van, hogy már a 10 éves korosztálytól kezdve szakos tanár tanítja a matematikát. Ebből következik annak a szükségessége, hogy nem ugyanazt a képzést igényli az általános iskolai és a középiskolai matematikatanár.

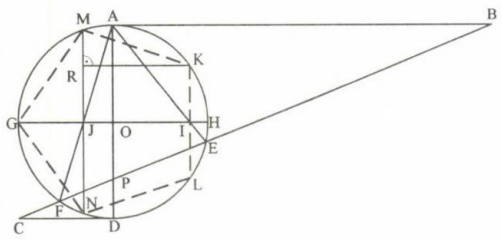
További fontos szempont a kötelező iskoláztatás kiterjesztése 18 éves korig, valamint a felsőktatásban való részvétel egyre nagyobb arányának hatása a tanárképzésre.

A résztvevők megállapították, hogy a felmerült kérdések tartalmi és részletekbe menő további megvitásához mindenképpen szükség van szűkebb szakmai körökben rendezendő konferenciákra, így célul tűztük ki szakmódszertanos konferenciák megrendezését a közeljövőben.

Csorba Ferenc – Hárspatakiné Dékány Veronika

A szabályos ötszög szerkesztésének egy lehetséges módja

A Középiskolai Mathematikai Lapok 1898. évi szeptemberi számában (VI. évfolyam, 1. szám, 8. oldal) olvashatjuk Schroeter alábbi eljárását szabályos ötszög szerkesztésére:



Adott egy egységsugarú kör. Az AD átmérő két végpontjában egy-egy érintőt húzunk. A-ban jobbra felmérünk az érintőre egy $AB=4$ egység hosszúságú szakaszt, D-ben balra egy $DC = 1$ egység hosszúságú szakaszt. Összekötjük a B és a C pontokat, a BC egyenes és a kör metszéspontjai legyenek E és F. Összekötjük az E és az F pontokat A-val. Ahol ezek az összekötő egyenesek metszik az AD-re merőleges GH átmérőt, kapjuk az I és a J pontokat. I-ben merőlegest állítunk GH-ra, ahol ez a merőleges metszi a kört, ott lesz a K és az L pont. Ugyanígy merőlegest állítunk J-ben GH-ra, ahol ez a merőleges met-

szi a kört, ott lesz az M és az N pont. Igazolható, hogy a $GNLKM$ ötszög szabályos.

A bizonyítás nem, csak a puszta eljárás található meg az említett lapban. A nálunk található példány – a benne látható megjegyzésekből ítélve – érdeklődő ember kezében volt. Valószínű, hogy megkísérelte a bizonyítást. Sajnos, csak egy szabadkézzel készített ábra a 9. oldal lap alján jelzi mindezt. Ez azért arra utal, hogy a szerkesztés menetét végiggondolta. Az alábbiakban mutatunk egy bizonyítást a szerkesztési eljárás helyességére.

Az egységsugarú körbe írt szabályos ötszög oldalhosszát a következő módon számolhatjuk ki:

A középponti szög 72°-os. A középponti háromszögben egy cosinus tételt felírva:

$$a^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 72° = 2 - 2 \cdot \sin 18° =$$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{8 - 2\sqrt{5} + 2}{4} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4},$$

ahonnan

$$a = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

(Lehet így is számolni:

$$a = 2r \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 1 \cdot \sin 36° =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2})$$

A fent leírt szerkesztés helyességének igazolásához meg fogjuk megmutatni, hogy a GNLKM ötszög oldalainak hossza az előbb megadott érték.

Az ábra jelöléseit használva:

$ABP\Delta$ hasonló $DCP\Delta$, mert két szögük megegyezik (derékszög, illetve csúcsszög), a hasonlóság aránya:4:1, így

$$DP = \frac{2}{5}, PA = \frac{8}{5}.$$

Kiszámítjuk Pithagorasz-tétel segítségével CP hosszát.

$$CP = \sqrt{1 + \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

Felírjuk a C pont körre vonatkozó hatványát:

$$CD^2 = CF \cdot CE = \left(\frac{\sqrt{29}}{5} - FP\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{29}}{5} + PE\right) =$$

$$= \frac{29}{25} + \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot (PE - FP) - FP \cdot PE.$$

Ugyancsak felírjuk a P pont körre vonatkozó hatványát:

$$(1) \qquad FP \cdot PE = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{25}.$$

Ezt az eredményt behelyettesítjük az előző sorba:

$$1^2 = \frac{29}{25} + \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot (PE - FP) - \frac{16}{25}.$$

Ebből

$$\frac{\sqrt{29}}{5} \cdot (PE - FP) = \frac{12}{25},$$

illetve

$$(2) \qquad PE = \frac{12}{5\sqrt{29}} + FP.$$

Ezt az eredményt behelyettesítjük (1)-be, a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{12}{5\sqrt{29}} \cdot FP + FP^2 = \frac{16}{25},$$

rendezve

$$(3) \qquad FP^2 + \frac{12}{5\sqrt{29}} \cdot FP - \frac{16}{25} = 0.$$

Ennek megoldása:

$$FP_{1,2} = \frac{-\frac{12}{5\sqrt{29}} \pm \sqrt{\frac{144}{25 \cdot 29} + \frac{64}{25}}}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{12}{5\sqrt{29}} \pm \frac{20\sqrt{5}}{5\sqrt{29}}}{2} = \frac{-6 \pm 10\sqrt{5}}{5\sqrt{29}}.$$

A két eredményből csak a pozitív előjelű jó, hiszen szakaszról van szó, így

$$FP = \frac{-6 + 10\sqrt{5}}{5\sqrt{29}},$$

és (2)-be visszahelyettesítve:

$$PE = \frac{12}{5\sqrt{29}} + \frac{-6 + 10\sqrt{5}}{5\sqrt{29}} = \frac{6 + 10\sqrt{5}}{5\sqrt{29}}.$$

Legyen az $ABP\Delta$-ben $APB\sphericalangle = \alpha$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Az $APE\Delta$-ben felírva a cosinus tételt:

$$AE^2 = \frac{64}{25} + \frac{(6+10\sqrt{5})^2}{25\cdot 29} - 2\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{6+10\sqrt{5}}{5\sqrt{29}}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{1856+536+120\sqrt{5}-192-320\sqrt{5}}{25\cdot 29} =$$

$$= \frac{2200-200\sqrt{5}}{25\cdot 29} = \frac{88-8\sqrt{5}}{29},$$

$$AE = \sqrt{\frac{88-8\sqrt{5}}{29}}.$$

Írjuk fel a cosinus tételt az $APF\Delta$-ben is:

$$AF^2 = \left(\frac{-6+10\sqrt{5}}{5\sqrt{29}}\right)^2 + \frac{64}{25} - 2\cdot\frac{-6+10\sqrt{5}}{5\sqrt{29}}\cdot\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right) =$$

$$= \frac{536-120\sqrt{5}+1856-192+320\sqrt{5}}{25\cdot 29} =$$

$$= \frac{2200+200\sqrt{5}}{25\cdot 29} = \frac{88+8\sqrt{5}}{29},$$

$$AF = \sqrt{\frac{88+8\sqrt{5}}{29}}.$$

Az I pont körre vonatkozó hatványa:

$$AI\cdot IE = GI\cdot IH.$$

Legyen $OI = x$, ekkor $AI = \sqrt{1+x^2}$, így a hatvány a következő módon alakul:

$$\sqrt{1+x^2}\cdot(AE-\sqrt{1+x^2}) = (1+x)\cdot(1-x),$$

$$AE\cdot\sqrt{1+x^2} - 1 - x^2 = 1 - x^2,$$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{2}{AE},$$

$$x^2 = \frac{4}{AE^2} - 1 = \frac{4\cdot 29}{88-8\sqrt{5}} - 1 =$$

$$= \frac{29\cdot(22+2\sqrt{5})}{484-20} - 1 = \frac{638+58\sqrt{5}-464}{464} =$$

$$= \frac{174+58\sqrt{5}}{464} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}.$$

$$x = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Most ismét felírjuk az I pontnak a körre vonatkozó hatványát: $(1+x)\cdot(1-x) = IK\cdot IL = IK^2$, ahol felhasználtuk, hogy a szimmetria miatt $IK = IL$.

Így

$$IK^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16},$$

$$IK = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad KL = 2\cdot IK = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

és ez valóban a szabályos ötszög oldala.

Írjuk fel a J pont körre vonatkozó hatványát:

$$GJ\cdot JH = AJ\cdot JF,$$

Legyen $JO = y$, így a hatvány a következő:

$$(1-y)\cdot(1+y) = \sqrt{1+y^2}\cdot(AF-\sqrt{1+y^2}),$$

$$1 - y^2 = AF\cdot\sqrt{1+y^2} - 1 - y^2.$$

Ebből

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{2}{AF}, \quad y^2 = \frac{4}{AF^2} - 1 = \frac{4\cdot 29}{88+8\sqrt{5}} - 1 =$$

$$= \frac{29\cdot(22-2\sqrt{5})}{484-20} - 1 =$$

$$= \frac{638-58\sqrt{5}-464}{464} = \frac{174-58\sqrt{5}}{464} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}.$$

$$y = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ismét felírjuk a J pont körre vonatkozó hatványát:

$$1 - y^2 = MJ\cdot JN = MJ^2,$$

$$MJ^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}.$$

$$MJ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

MG hossza az $MGJ\Delta$-ből Pithagorasz-tétellel számolható:

$$MG^2 = GJ^2 + MJ^2 = (1-y)^2 + 1 - y^2 =$$
$$= 1 + y^2 - 2y + 1 - y^2 = 2 - 2y =$$
$$= 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{8 - 2 \cdot (\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4},$$

ebből

$$MG = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

és ez valóban a szabályos ötszög oldala. A szimmetria miatt $GM = GN$.

MK-t a következő módon számíthatjuk ki: húzzunk a K ponton keresztül párhuzamost a GH átmérővel, ez R-ben metszi az MJ szakaszt. $MRK\Delta$-ben a Pithagorasz-tételt alkalmazva:

$$MK^2 = MR^2 + RK^2 = (y+x)^2 + (MJ - KI)^2 =$$
$$y^2 + x^2 + 2xy + MJ^2 + KI^2 - 2 \cdot MJ \cdot KI =$$
$$= y^2 + x^2 + 2xy + 1 - y^2 + 1 - x^2 - 2 \cdot MJ \cdot KI =$$
$$= 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} =$$
$$= 2 + 2 \cdot \frac{4}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{100-20}}{16} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{8\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4},$$

ebből

$$MK = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

és ez valóban a szabályos ötszög oldala. A szimmetria miatt $MK = NL$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $GNLKM$ ötszög oldalai egyenlő hosszúak, tehát az ötszög szabályos, hiszen körbe írtuk.

Egy másik megoldási lehetőséget kínál a koordinátageometria. „Egyszerű" számolásokkal ugyanerre az eredményre jutunk, a számolások elvégzését az olvasóra bízzuk.

Csete Lajos

A Knuth-féle számokról

A *Konkrét matematika* című érdekes könyvben [1] vizsgálták a következő Knuth-féle számokat.

Legyen

$$K_0 = 1 \text{ és } K_{n+1} = 1 + \min\left(2K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}, 3K_{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil}\right)$$

ha $0 < n$ egész szám.

Itt a szögletes zárójel az egészrészt jelöli, vagyis $[x]$ jelenti az x egész részét, vagyis a legnagyobb olyan egészet, amely nem nagyobb x-nél. A min művelet az utána felsorolt számok közül a legkisebbet választja ki (vagy az egyiket a legkisebbek közül).

Így

$$K_1 = 1 + \min\left(2K_{\left\lceil \frac{0}{2} \right\rceil}, 3K_{\left\lceil \frac{0}{3} \right\rceil}\right) =$$
$$1 + \min(2K_0, 3K_0) = 1 + \min(2,3) = 1 + 2 = 3;$$
$$K_2 = 1 + \min\left(2K_{\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil}, 3K_{\left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil}\right) =$$
$$= 1 + \min(2K_0, 3K_0) = 3;$$
$$K_3 = 1 + \min\left(2K_{\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil}, 3K_{\left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil}\right) =$$
$$= 1 + \min(2K_1, 3K_0) = 1 + \min(6,3) = 4;$$

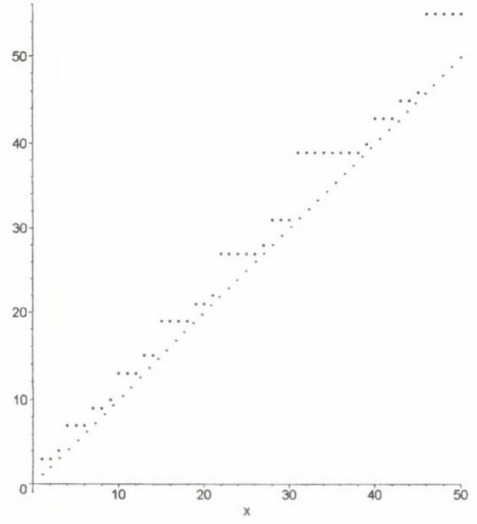
$$K_4 = 1 + \min\left(2K_{\left[\frac{3}{2}\right]}, 3K_{\left[\frac{3}{3}\right]}\right) =$$

$$1 + \min(2K_1, 3K_1) = 1 + \min(6,9) = 7,$$

Felsoroljuk a Knuth-féle számokat n = 1-től n = 100-ig:

3, 3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 13, 13, 13, 15, 15, 19, 19, 19, 19, 21, 21, 22, 27, 27, 27, 27, 27, 28, 31, 31, 31, 39, 39, 39, 39, 39, 39, 39, 39, 40, 43, 43, 43, 45, 45, 46, 55, 55, 55, 55, 55, 55, 55, 55, 57, 57, 58, 63, 63, 63, 63, 63, 64, 67, 67, 67, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 81, 81, 82, 85, 85, 85, 87, 87, 91, 91, 91, 91, 93, 93, 94, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111.

A következőkben néhány kiszámított Knuth-féle számot ábrázolunk az n függvényében, mégpedig közös koordináta-rendszerben az $n \mapsto n$ függvény grafikonjával, ahol n pozitív egész szám. (A függelékben megtalálhatjuk azt a Maple programot, amellyel ezt az ábrázolást végeztük.)



Ezen ábrán körökkel jelöltük a Knuth-féle számokat és + jelekkel az $n \mapsto n$ függvény megfelelő grafikonpontjait és n = 50-ig végeztük el az ábrázolást.

Az ábráról könnyen leolvashatjuk a következő sejtést:

$K_n > n$ teljesül minden $n > 0$ egész számra.

Ez valóban igaz, ezt igazolták [1]-ben. A továbbiakban ettől kissé eltérő módon igazoljuk ezt, vagyis azt, hogy pozitív egész n-ekre az n-edik Knuth-féle szám mindig nagyobb n-nél.

Bizonyítás:

Indirekt módon tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Vagyis az a feltevésünk, hogy van olyan n pozitív egész, amelyre $K_n \le n$.

A feltevésünk teljesül, ha létezik olyan m pozitív egész szám, amelyre

(*) $2K_{\left[\frac{m}{2}\right]} < m$ vagy (**) $3K_{\left[\frac{m}{3}\right]} < m$ fennáll.

Ugyanis akkor

$$K_{m+1} = 1 + \min\left(2K_{\left[\frac{m}{2}\right]}, 3K_{\left[\frac{m}{3}\right]}\right) <$$

$$< 1 + \min(m,m) = 1 + m,$$

ha (*) és (**) egyszerre teljesül.

$$Ha\ 2K_{\left[\frac{m}{2}\right]} < m \text{ de } m < 3K_{\left[\frac{m}{3}\right]},$$

$$\text{akkor } K_{m+1} = 1 + \min\left(2K_{\left[\frac{m}{2}\right]}, 3K_{\left[\frac{m}{3}\right]}\right) <$$

$$< 1 + \min\left(m, 3K_{\left[\frac{m}{3}\right]}\right) = 1 + m.$$

$$Ha\ m < 2K_{\left[\frac{m}{2}\right]} \text{ de } 3K_{\left[\frac{m}{3}\right]} < m, \text{ akkor}$$

$$K_{m+1} = 1 + \min\left(2K_{\left[\frac{m}{2}\right]}, 3K_{\left[\frac{m}{3}\right]}\right) <$$

$$< 1 + \min\left(2K_{\left[\frac{m}{2}\right]}, m\right) = 1 + m.$$

Legyen m a legkisebb ilyen pozitív egész szám. Ekkor a

$$2K_{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} < m$$

egyenlőtlenségből

$$K_{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} < \frac{m}{2}$$

és ebből pedig

$$K_{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

egyenlőtlenség következik, hiszen

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \leq \frac{m}{2} \text{ és } K_{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} \text{ egész szám.}$$

Ugyanilyen módon ha a

$$3K_{\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil} < m$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor ebből következik, hogy

$$K_{\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil} \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

Ezzel készen vagyunk, mert találtunk m-nél kisebb pozitív egészet, amelyre $K_n \leq n$ teljesül. Mégpedig

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \text{ vagy } \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$

jó lesz ilyen egésznek. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem igaz a feltevésünk, vagyis $K_n > n$ teljesül minden n pozitív egész számra. Ezzel igazoltuk a sejtést.

Megjegyzések

Donald Erwin Knuth a Stanford Egyetemen a számítástudomány professzoraként működött. A Knuth-féle számok egy érdekes kombinatorikai magyarázatát olvashatjuk az idézett könyv 3.43. feladatának megoldásában a 99. és az 507. oldalon. Itt olvashatjuk azt is, hogy Michael Fredman megmutatta 1972-ben, hogy

$$\frac{K_n}{n}$$

tart az 1-hez, ha n tart a végtelenbe.

Függelék

```
> restart:
> Knuth: = proc (n)
>                local K,k;
> for k from 1 to n do
>                K[0] :=l;
> K[k]: = 1 + min (2*K[floor((k-1)/2)],
          3*K[floor((k-1)/3)])
> od;
> end:
> s: = seq(Knuth(i),i=1..100):
```

Ha látni akarjuk az előbb már leírt számokat, akkor az előző kettőspont helyett gépeljünk pontosvesszőt.

```
> f := [[ i, s[i]] $i=1..50]:
> fp:=plot(f, x=0..50, style= point, symbol
=circle):
> fn:=plot(n, n=0..50,style=point,symbol
=cross):
> with (plots) :
> display ( [fp, fn] ) :
```

Ha látni akarjuk a grafikont, akkor az előző kettőspont helyett pontosvesszőt használjunk.

Irodalom

[1] Ronald L. Graham-Donald E. Knuth-Oren Patashnik, Konkrét matematika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1998. 79. old. és 96. old. 25. feladat, míg az 502. oldalon a megoldás gerince.

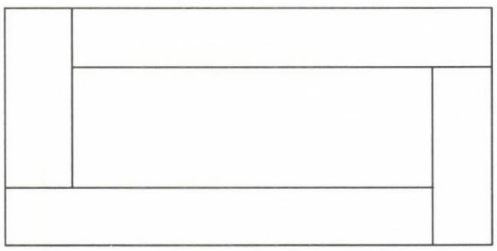
XXXII. Országos Kalmár László Verseny
Megyei fordulójának feladatai és megoldásai

Ötödik osztály

1. Melyik az a csupa egyforma számjegyből álló $\overline{aaa}$ alakú háromjegyű szám, amelyet önmagával szorozva (négyzetre emelve) a következő ötjegyű számot kapjuk: $\overline{bcdeb}$
(azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek)? A feladatot zsebszámológép nélkül, minél kevesebb próbálkozással oldd meg!

2. Egy tízszintes házban minden szint (a földszint és az emeletek is) egyforma magas. Hányszor olyan hosszú a tizedik szintre vezető lépcső, mint ami az ötödik szintre vezet?

3. Az ábrán egy téglalapot bontottunk fel 5 kisebb téglalapra úgy, hogy semelyik két szomszédos téglalap (amelyiknek van közös oldalszakasza) együtt nem alkot téglalapot. Bontsál fel ugyanilyen módon egy téglalapot 6, 7 és 8 téglalapra is!



4. Hány olyan négyjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amelyben legalább egy 9-es számjegy szerepel?

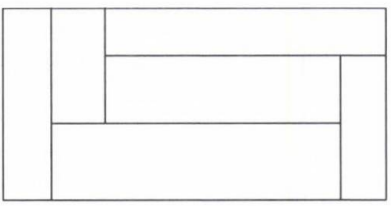
Az 5. osztály feladatainak megoldása

1. Az a számjegy csak 1 vagy 2 lehet, mert $333^2 = 110\,889$, s ez már hatjegyű szám.

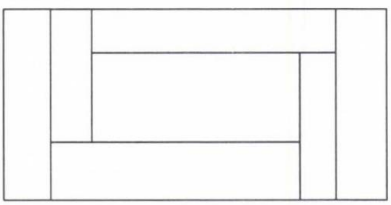
Mivel $111^2 = 12\,321$, és itt az eredményben a hátulról számított 2. és 4. számjegy azonos, ez nem jöhet szóba. $222^2 = 49\,284$, ezért a keresett háromjegyű szám 222.

2. Jelöljük az egy szintet emelkedő lépcső hosszúságát h-val. Ekkor a 10. szintre vezető lépcső 9 szintet emelkedik, tehát hossza 9h.
Az 5. szintre vezető lépcső 4 szintet emelkedik, tehát hossza 4h.
A 10. szintre vezető lépcső tehát
$\frac{9h}{4h} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ – szor olyan hosszú, mint az 5. szintre vezető lépcső.

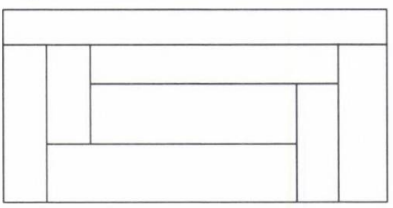
3. Például a következő felbontások megfelelők:
6 téglalapra:



7 téglalapra:



8 téglalapra:



4. Azokat a négyjegyű számokat könnyű összeszámolni, amelyekben nincs 9-es számjegy, ezek száma

$$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832,$$

mivel az első számjegy nem lehet 0 és 9, a többi számjegy csak 9-es nem lehet. Az összes négyjegyű számok száma 9000.

Így a keresett négyjegyű számok száma

$$9000 - 5832 = 3168.$$

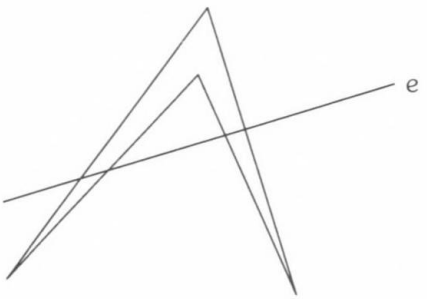
Hatodik osztály

1. A következő szorzásban állapítsd meg a hiányzó számjegyeket (az első tényező háromjegyű):

$$\square\,5\,\square \cdot 13 = 2\,\square\,\square\,2.$$

2. Egy kiállításra a belépőjegy ára 1500 Ft volt. Egy idő után csökkentették a belépőjegy árát. Ezután a látogatók száma a következő napon másfélszeresére nőtt, a bevétel pedig egy negyedével megnövekedett. Hány forinttal csökkentették a belépőjegy árát?

3. Az ábrán egy olyan (nem konvex) négyszög látható rajzoltunk, amelyhez megadható olyan *e* egyenes, amely a négyszögnek mind a négy oldalát metszi. Rajzolj olyan hatszöget és olyan nyolcszöget, amelyhez megadható olyan egyenes, amely az összes oldalát metszi!



4. Keress olyan nyolcjegyű számot, amelynek a számjegyeit alkalmas módon felcserélve, majd az így kapott számot az eredetihez adva az eredmény 99999999 lesz. Megoldható-e a feladat a hétjegyű számok körében?

A 6. osztály feladatainak megoldása

1. Mivel az eredmény utolsó számjegye 2, és 13-mal szorzunk, az első tényező utolsó jegye csak 4 lehet.

Az első tényezőben az első helyen 2 vagy annál nagyobb számjegy nem állhat, mert

$$254 \cdot 13 = 3302.$$

Így az első tényező első jegye 1, a hiányzó számjegyekkel kiegészített szorzás:

$$154 \cdot 13 = 2002.$$

2. Jelöljük az árcsökkentés előtti napi látogatószámot n-nel, ekkor a napi bevétel $1500n$ Ft volt.

Ha az árcsökkentés után a belépő ára a Ft, akkor a napi bevétel az árcsökkentés után

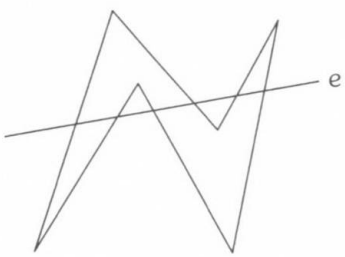
$$a \cdot \frac{3}{2} n.$$

Ez $\frac{5}{4}$-szerese az előző napi bevételnek:

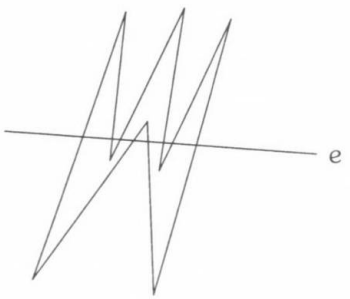
$$\frac{5}{4} \cdot 1500n = a \cdot \frac{3}{2} n.$$

Ebből $a = 1250$ Ft, tehát a belépőjegy árát 250 Ft-tal csökkentették.

3. Például egy ilyen hatszög és egyenes:



Például egy ilyen nyolcszög és egyenes:



4. Például a következő szám jó lesz: 45454545, mert a szomszédos jegyeit felcserélve az 54545454 számot kapjuk, és a kettő összege: 9999999.

Ha lenne ilyen hétjegyű szám, akkor az eredeti szám számjegyeinek és a felcserélt jegyekből álló szám számjegyeinek összege $7 \cdot 9 = 63$ lenne. Ez pedig nem lehet, mert ha az eredeti szám számjegyeinek összege A, akkor a felcserélt jegyekből álló szám számjegyeinek összege is A, tehát $2A = 63$, $A = 31{,}5$ lenne, ami nem egész szám.

Hetedik osztály

1. Milyen számjegyeket írjunk a és b helyére, hogy a kapott kilencjegyű szám osztható legyen 72-vel?

32a35717b

2. Az ABC egyenlőszárú háromszöget az AB alap egyik csúcsából induló szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre bontja. Számítsuk ki a háromszög szögeit!

3. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számokból álló n, k számpárt, amelyre teljesül, hogy

$$n^2 + k^2 = 3000.$$

4. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalára kifelé megrajzoljuk a BPC és CQD szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy APQ is szabályos háromszög!

5. Az első 2002 pozitív egész számot három csoportra akarjuk bontani a következő módon. A második csoportba tartozó számok összege 100-zal nagyobb legyen, mint az első csoportbeli számok összege, és a harmadik csoportba tartozó számok összege is 100-zal legyen nagyobb, mint a második csoportba tartozó számok összege. Megoldható-e a feladat?

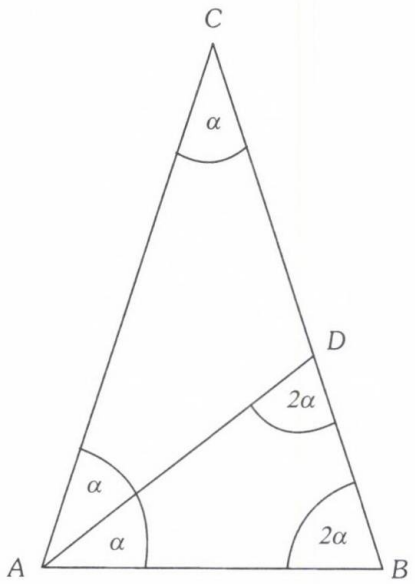
A 7. osztály feladatainak megoldása

1. Mivel $72 = 8 \cdot 9$, továbbá 8 és 9 relatív prímek, elég azt nézni, hogy a kilencjegyű szám osztható legyen 8-cal és 9-cel, akkor a szorzatukkal is osztható lesz.

Azok a számok oszthatók 8-cal, amelyeknek a három utolsó helyértékén álló számjegyből álló háromjegyű szám osztható 8-cal. Ennek alapján csak $b = 6$ jöhet szóba.

Azok a számok oszthatók 9-cel, amelyeknek a számjegyeit összeadva 9-cel osztható számot kapunk. Ebben az esetben a számjegyek összege: $34 + a$, ez csak $a = 2$ esetén osztható 9-cel, tehát $a = 2$.

2. Az ábra jelöléseit használjuk. Mivel AD szögfelező és ABD egyenlő szárú háromszög, csak az fordulhat elő, hogy $ABD\sphericalangle = ADB\sphericalangle = 2\alpha$, és ekkor $BAD\sphericalangle = \alpha$.



Mivel az ABD háromszög szögeinek összege $180°$, $5\alpha = 180°$, $\alpha = 36°$.

Tehát az ABC háromszög alapon fekvő szögei $72°$-osak, a C csúcsban $36°$-os szög van.

3. Mivel az egyenlőség jobb oldalán álló szám, a 300 osztható 3-mal, a bal oldalon álló szám is osztható 3-mal.

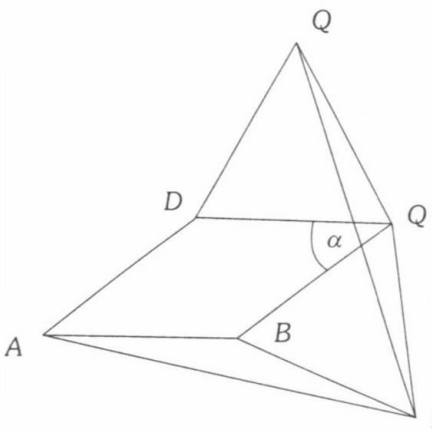
Az n szám 3-mal való osztási maradéka 0, 1 vagy 2 lehet, így n^2-nek a 3-mal való osztási maradéka csak 0 vagy 1 lehet.

Ennek alapján n^2+k^2 3-mal való osztási maradéka 0, 1 vagy 2 és 0 csak abban az esetben, ha n is és k is osztható 3-mal.

Ekkor viszont n^2+k^2 osztható 9-cel, míg a jobb oldalon álló 300 nem osztható 9-cel.

Tehát nincs olyan n és k pozitív egész szám, amelyre az egyenlőség teljesül.

4. Az ábra jelöléseit használjuk. Ha a paralelogramma BCD szöge α, akkor ABC szöge $180° - \alpha$. A PCQ szög $\alpha + 120°$, a PBA szög $360° - (60°+180°-\alpha) = \alpha + 120°$. $PB = PC$, $BA = CQ$.



Így az ABP és QCP háromszögek egybevágók, mivel QCP-t a P körüli 60°-os elforgatás átviszi ABP-be.

Ezért a QPA szög 60° és $QP = AP$, tehát az APQ háromszög szabályos.

5. Tegyük fel, hogy a kívánt csoportosítás lehetséges. Jelöljük az első csoportba kerülő számok összegét A-val, ekkor a másodikba kerülő számok összege $A + 100$, a harmadik csoportba kerülők összege pedig $A + 200$.

Azt kapjuk tehát, hogy az l-től 2002-ig terjedő egész számok összege $3A+300$, osztható 3-mal.

Másrészt tudjuk, hogy

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2001 + 2002 = \frac{2003 \cdot 2002}{2} = 2005003,$$

nem osztható 3-mal, így ellentmondásra jutottunk. A feladat tehát nem oldható meg.

Nyolcadik osztály

1. Melyik lehet az a négyjegyű tízes számrendszerbeli szám, amelyet 9-cel megszorozva olyan négyjegyű számot kapunk, amely ugyanazokból a számjegyekből áll, mint az eredeti szám, csak fordított sorrendben?

2. Három egységsugarú kör egy közös P ponton halad át. Másik metszéspontjuk páronként A_1, A_2 és A_3, a középpontjaik O_1, O_2 és O_3. Igazoljuk, hogy az $O_1O_2O_3$ háromszög egybevágó az $A_1A_2A_3$ háromszöggel!

3. Igazoljuk, hogy ha p prím és $2p^2 + 13$ is prím, akkor $2p^2 + 1$ és $2p^2 + 11$ is prímszámok!

4. Az ABC hegyesszögű háromszög B csúcsára illeszkedő e egyenesek közül melyikre teljesül, hogy az AC oldal F felezőpontja a legmesszebb van e-től?

5. Legkevesebb hány szín kell a sakktábla mezőinek kiszínezéséhez, ha azt akarjuk, hogy két mező különböző színű legyen, ha egyikről a másikra egy bástyával átléphetünk? (A bástya a sakktáblán csak „vízszintesen" és „függőlegesen" léphet, akárhány mezőt.)

A 8. osztály feladatainak megoldása

1. Jelöljük a keresett négyjegyű számot így y: $\overline{abcd}$, ahol a, b, c, d számjegyek. Mivel a szám 9-szerese is négyjegyű, csak $a = 1$ lehetséges.

Ezután írjuk fel a feltételt:

$$9(1000 + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + 1.$$

Ebből rendezéssel ezt kapjuk:

$$8999 = 991d + 10c - 890b.$$

Mivel a jobb oldalon a 2. és 3. tag osztható 10-zel, $d \cdot 1 = 9$, azaz $d = 9$.

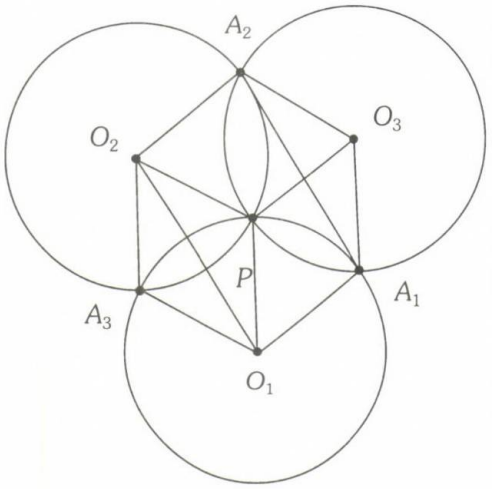
A kapott értéket beírva az egyenlőségbe, és rendezve:

$$8 = c - 89b.$$

Mivel b számjegy, ez csak $b = 0$ esetén lehetséges, így $c = 8$

Az 1089 megfelelő, mert $9 \cdot 1089 = 9801$.

2. Az ábra jelöléseit használjuk. Az $O_1A_1O_3P$ négyszög rombusz, mert minden oldala 1 egység (a körök sugara). Ezért $O_1P = A_1O_3$ és O_1P párhuzamos A_1O_3-mal.



Hasonlóan adódik, hogy O_2PO_3A rombusz, ezért $O_2P = A_2O_3$ és O_2P párhuzamos A_2O_3-mal.

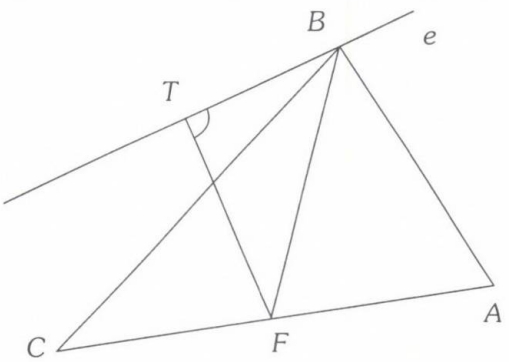
Ebből következik, hogy az O_1PO_2 és $A_1O_3A_2$ háromszögek egybevágók, megfelelő oldalaik egyenlők, tehát $O_1O_2 = A_1A_2$.

Ugyanígy igazolható, hogy $O_2O_3 = A_1A_3$ és $O_3O_1 = A_2A_3$. Az $O_1O_2O_3$ háromszög tehát egybevágó az $A_1A_2A_3$ háromszöggel.

3. Ha p = 3 prím, akkor $2p^2 + 13 = 31$ prím, és $2p^2 + 1 = 19$ prím, $2p + 11 = 29$ prím.

Ha $p \neq 3$ és prím, akkor p-nek a 3-mal való osztási maradéka 1 vagy 2, p^2-nek mindkét esetben 1 a 3-mal való osztási maradéka. Ekkor viszont $2p^2 + 13$ osztható 3-mal, tehát nem lehet prím, mert nyilván nagyobb, mint 3.

4. Az ábra jelöléseit használjuk. Állítsunk merőlegest f-ből e-re, ennek talppontja legyen T. Az FBT derékszögű háromszög FT befogója



mindig kisebb, mint az FB átfogó.

Egyetlen esetben nem kapunk háromszöget, amikor e merőleges FB-re.

Ezekből következik, hogy az F-től az e egyenes van legmesszebb, amelyik merőleges FB-re, a B csúcsból induló súlyvonalra.

5. A bástya a sakktábla legalsó sorában a bal oldali első mezőről ebben a sorban bármely más mezőre léphet, tehát ezeket a mezőket mind különbözőre kell színezni. Így a sakktábla mezőinek színezéséhez legalább 8 szín szükséges.

Jelöljük ezeket a színeket az ábrán látható módon az ábécé egyes betűivel. Ez a 8 szín elég is, ha a mezőket az ábrán látható módon színezzük, eggyel elcsúsztatva a színezést minden következő sorban.

h	a	b	c	d	e	f	g
g	h	a	b	c	d	e	f
f	g	h	a	b	c	d	e
e	f	g	h	a	b	c	d
d	e	f	g	h	a	b	c
c	d	e	f	g	h	a	b
b	c	d	e	f	g	h	a
a	b	c	d	e	f	g	h

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2003. augusztus 31.

225. Az A pozitív egész szám ugyanazon számjegyekből áll, mint a B pozitív egész szám. (A számjegyei a B számjegyeinek egy permutációjaként állnak elő.) Igaz-e, hogy a $2A$ és $2B$ számokban ugyanannyi a számjegyek összege?

226. Melyek azok az ABC háromszögek, amelyekben a $\frac{BC}{AC}$ arány pozitív egész szám, és az AB, valamint az AC oldal A-hoz közelebbi harmadoló pontjain átmenő egyenes érinti a háromszög beírt körét?

Bíró Bálint, Eger

227. Jelölje az ABC háromszög magasságpontját M, súlypontját S, Feuerbach-körének középpontját pedig F. Legyen $P \in \{M, S, F\}$ tetszőleges. Tekintsük a PAB, PBC és PCA háromszögeket, és tekintsük mindhárom háromszög magasságpontját, súlypontját és Feuerbach-körének középpontját. Legyen A' a PBC, B' a PAC, C' pedig a PAB háromszögben valamelyik felsorolt középpont, de mindegyikben azonos típusú. Igaz-e, hogy az $A'B'C'$ háromszög mindig hasonló az ABC háromszöghöz?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

228. Egy $4k$ ($k \in N^+$) oldalú szabályos sokszöget egyrétűen és hézagmentesen kitöltöttünk paralelogrammákkal. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogrammák közül legalább k darab téglalap!

229. f a valós számok halmazán értelmezett differenciálható függvény. Tudjuk, hogy bármely valós x esetén

$$f'(x) + af(x) = e^{-bx^2},$$

ahol a és b pozitív valós számok. Számítsuk ki a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ határértéket!

Bencze Mihály, Brassó

Feladatmegoldások (211-214. feladatok)

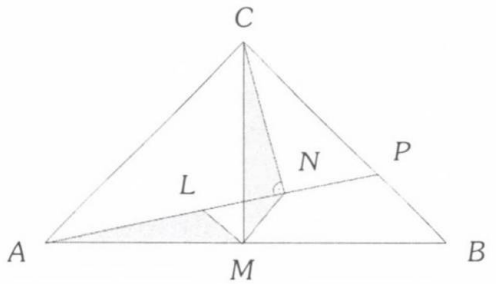
211. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja M. Legyen P a BC befogó tetszőleges pontja, N a C-ből az AP szakaszra állított merőleges talppontja, L pedig az AP szakasz azon pontja, amelyre $AL = CN$.

a) Mekkora az LMN szög?

b) Ha az ABC háromszög területe négyszer akkora, mint az LMN háromszög területe, akkor mekkora a CAP szög?

Megoldás:

a) Az MAL és az MCN háromszögek (*1. ábra*) egybevágók, mert két-két oldaluk (MA és MC illetve AL és CN) egyenlő, továbbá $MAL\sphericalangle =$



1. ábra

Így az M körüli 90°-os forgatás az MCN háromszöget az MAL háromszögbe, az MN szakaszt pedig az ML szakaszba viszi, ezért $LMN\sphericalangle = 90°$.

b) Az előzőek szerint az LMN háromszög egyenlő szárú és derékszögű, ezért hasonló az ABC háromszöghöz. Mivel a területek aránya 1 : 4, ezért a hasonlóság aránya 1 : 2. Így ha $MN = a$, akkor $AC = 2a$.

Thalész tételének megfordítása szerint M és N illeszkedik az AC átmérőjű, a sugarú körre, MN e körnek egy a hosszúságú húrja. Az MN húrhoz tartozó MAN (nyilvánvalóan hegyes) kerületi szög 30°-os, így $CAP\sphericalangle = 45° - MAN\sphericalangle = 15°$.

Kiss Zoltán, Pécs

A megoldók száma: 13.

212. $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ a pozitív egész számok sorozatának azon részsorozata, amely pontosan azokból a pozitív egészekből áll, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában csak páros számjegyek fordulnak elő. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész m számot, amelyre $a_m = 12m$.

Megoldás: Legyen m pozitív egész szám, és írjuk fel m-et az ötös számrendszerben:

$$m = b_n \cdot 5^n + b_{n-1} \cdot 5_{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 5 + b_0,$$

ahol $0 \le b_i \le 4$ és $b_n \neq 0$. Legyen továbbá

$$f(m) = 2b_n \cdot 10^n + 2b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + 2b_1 \cdot 10 + 2b_0.$$

Könnyen látható, hogy f értékkészlete pontosan azon pozitív egészek halmaza, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában csak páros számjegyek fordulnak elő.

Mivel $f(m_1) < f(m_2)$ akkor és csak akkor, ha $m_1 < m_2$, ezért $a_m = f(m)$ bármely pozitív egész m esetén. Azon m értékeket keressük, amelyekre

$$12(b_n \cdot 5^n + b_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 5 + b_0) =$$
$$= 2b_n \cdot 10^n + 2b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + 2b_1 \cdot 10 + 2b_0,$$

vagy

$$6(b_n \cdot 5^n + b_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 5 + b_0) =$$
$$= b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0. \quad (1)$$

Mivel

$$b_n \cdot 5^n + b_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 5 + b_0 \le 5^{n+1} - 1,$$

és

$$b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0 \ge 10^n,$$

ezért $6(5^{n+1} - 1) \ge 10^n$, ahonnan $2^n < 30$, azaz $n \le 4$.

Ha $n = 4$, akkor (1) alapján $10b_2 + 4b_1 + b_0 = 1250b_4 + 50b_3 \ge 1250$, ami lehetetlen. Hasonlóan mutatható meg, hogy $n \ge 3$, azaz $n = 3$. Ekkor $10b_2 + 4b_1 + b_0 = 50b_3$. (2)

Világos, hogy $b_3 = 1$, és mivel $b_0 - b_1$ osztható 5-tel, ezért $b_0 = b_1$. Ezzel (2): $2b_2 + b_0 = 10$. Ennek az egyenletnek két megfelelő megoldása van: $b_0 = 2$, $b_2 = 4$ vagy $b_0 = 4$, $b_2 = 3$. Így m két lehetséges értéke: $m_1 = 2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 5^3 = 237$ és $m_2 = 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 5^3 = 224$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

213. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy pozitív osztóinak négyzetösszege $(n + 3)^2$?

Megoldás: Legyenek n valódi osztói $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$. A feltételből

$$\sum_{i=1}^{k} d_i^2 = 6n + 8. \quad (1)$$

Tegyük fel, hogy n prímhatvány, azaz $n = p^m$. (A feltételből világos, hogy $m \ge 2$.) Ekkor (1):

$$p^2 + p^4 + \ldots + p^{2m-2} = 6p^m + 8, \quad (2)$$

amiből adódik, hogy p osztója 8-nak, azaz $p = 2$. Könnyen látható, hogy ekkor (2) bal oldala csak 4-gyel, jobb oldala viszont 8-cal is osztható, tehát n nem prímhatvány.

A valódi osztók száma (k) a fentiek miatt nem lehet 1, 3 vagy 5, ugyanis ezekben az esetekben $n = p^2$, $n = p^4$ vagy $n = p^6$ teljesülne.

Belátjuk, hogy a valódi osztók száma 5-nél nagyobb sem lehet.

Tegyük fel, hogy $k \ge 6$. Ekkor, mivel $d_i d_{k-i} = n$, ezért (1)-ből adódik, hogy

$$(d_{k-1} - d_1)^2 + (d_{k-2} - d_2)^2 + (d_{k-3} - d_3)^2 \le 8.$$

Ez viszont nem lehetséges, ugyanis $d_{k-1} - d_1$, $d_{k-2} - d_2$ és $d_{k-3} - d_3$ különböző pozitív egészek.

Kaptuk, hogy $k = 2$ vagy $k = 4$.

Tegyük fel, hogy $k = 4$. Ekkor n-nek 6 pozitív osztója van, amiből adódik, hogy $n = pq^2$, ahol p és q különböző prímek. Ekkor (1):

$$p^2 + q^2 + q^4 + p^2q^2 = 6pq^2 + 8. \quad (3)$$

q nem lehet 5 vagy annál nagyobb, ugyanis ellenkező esetben

$$q^4 + p^2q^2 \geq 2pq^3 \geq 10pq^2 > 6pq^2 + 8$$

teljesülne. Tehát $q = 2$ vagy $q = 3$ lehet csak. Ezekben az esetekben viszont (3) nem teljesül. Maradt a $k = 2$, azaz $n = pq$ ($p < q$, p és q prímek) eset. Ekkor (1):

$$p^2 + q^2 = 6pq + 8.$$

Ebből $p = 3q \pm 2\sqrt{2q^2 + 2}$. A legkisebb megfelelő megoldást $p = 7$, $q = 41$ esetén kapjuk, ekkor $n = pq = 287$.

A feladat feltételeinek megfelelő legkisebb pozitív egész szám tehát a 287.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 6.

214. Egy országnak 2001 városa van. Minden egyes városból legalább 1600 másik városba van közvetlen autóbuszjárat. Határozzuk meg azt a legnagyobb n értéket, amelyre teljesül, hogy van az országban n olyan város, amelyek közül bármely kettőt közvetlen autóbuszjárat köt össze.

Megoldás: A feladat átfogalmazva: Egy 2001 csúcsú gráf minden csúcsának fokszáma legalább 1600. Határozzuk meg azt a legnagyobb n értéket, amelyre teljesül, hogy biztosan van a gráfban n olyan csúcs, amelyek közül bármely kettőt él köt össze. (Maximális teljes részgráfot keresünk.)

Először belátjuk, hogy megadható olyan, a feltételeknek megfelelő gráf, amelyben nincs 6 csúcsú teljes részgráf. A gráf csúcsait öt csoportba osztjuk: az első csoportba 401, a többi négy csoportba 400-400 csúcs tartozzon. Két csúcsot akkor és csak akkor kössön össze él, ha különböző csoportban vannak. Ekkor az első csoportba tartozó csúcsok fokszáma 1600, a többi csúcsé 1601. Ha ebben a gráfban bárhogyan is kijelölünk 6 (vagy akár több) csúcsot, akkor a kijelölt csúcsok között lesz legalább kettő, amelyek ugyanabba a csoportba tartoznak. E két csúcsot nem kötheti össze él, tehát 6 (vagy több) csúcsú teljes részgráf nem adható meg. Ezért $n \leq 5$.

A továbbiakban azt látjuk be, hogy 5 csúcsú teljes részgráf biztosan megadható minden olyan gráfban, ami teljesíti a feladat feltételét. Ha P a gráf egy tetszőleges csúcsa, akkor legyen H_p azoknak a csúcsoknak a halmaza, amelyeket P-vel él köt össze. Belátjuk, hogy ha A és B a gráf két tetszőleges, éllel összekötött csúcsa, akkor $|H_A \cap H_B| \geq 1199$. Ez adódik abból, hogy $|H_B| \geq 1600$, $|H_B \setminus H_A| \leq 401$, és $|H_A \cap H_B| =$

$= |H_B| - |H_B \setminus H_A| \geq 1600 - 401 = 1199.$

Legyen $C \in H_A \cap H_B$. Ekkor az előző gondolatmenethez hasonlóan kapjuk, hogy

$$|H_A \cap H_B \cap H_C| = |H_A \cap H_B| -$$
$$-|(H_A \cap H_B) \setminus H_C| \geq 1199 - 400 = 799.$$

Legyen $D \in H_A \cap H_B \cap H_C$. Az előzőekhez hasonlóan

$$|H_A \cap H_B \cap H_C \cap H_D| = |H_A \cap H_B \cap H_C| -$$
$$-|(H_A \cap H_B \cap H_C) \setminus H_D| \geq 799 - 400 = 399.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségből adódik, hogy van olyan E csúcs, hogy $E \in H_A \cap H_B \cap H_C \cap H_D$. A, B, C, D és E ötpontú teljes részgráfot alkot, tehát a feladat megoldása $n = 5$.

Dályay Pál Péter, Szeged
Kiss Zoltán, Pécs

Megjegyzés: A feladatban megfogalmazott kérdésre Turán Pál híres tételének alkalmazásával közvetlenül választ kaphatunk. (A Turán-tétel megtalálható például *Katona Gyula Y. – Recski András – Szabó Csaba: A számítástudomány alapjai – Typotex Kiadó, Budapest, 2002.* – című könyv 89-90. oldalán.)

Bukorné Both Emőke, Révkomárom
Rakonczai György, Budapest
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

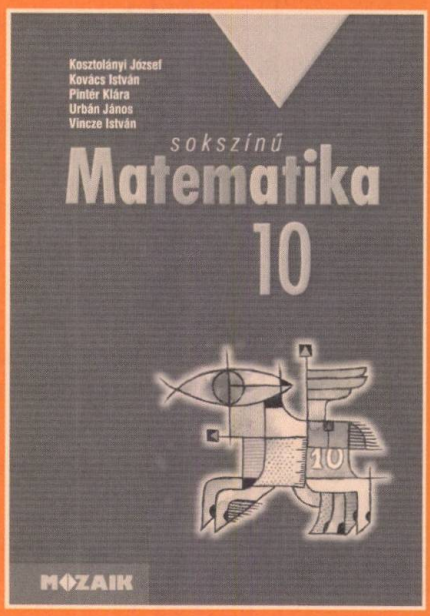
A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (211., 213.); Bukorné Both Emőke, Révkomárom (211-214.); Csorba Ferenc, Győr (211.); Dályay Pál Péter, Szeged (211-214.); Fitos László, Esztergom (211.); Kiss Zoltán, Pécs (211-214.); László Sándor, Szombathely (211.); Nagy Béla, Sarkad (211., 212.); Rakonczai György, Budapest (211-214.); Schuler László, Budapest (211., 212., 214.); Varga Éva, Kecskemét (211.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (211-214.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (211., 212.).

SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD

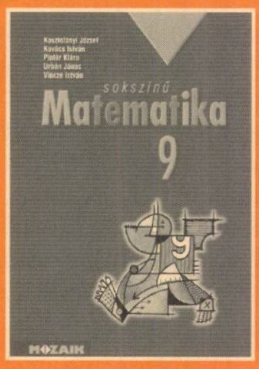
EGYEDÜLÁLLÓ SIKER A TANKÖNYVEK KÖZÖTT

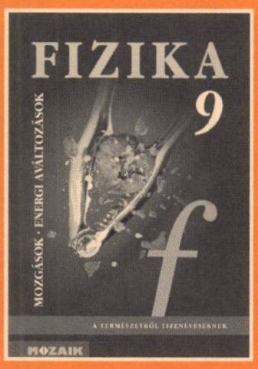
Az elmúlt évben három rangos díjat is elnyert az új 9. évfolyamos matematika tankönyv: a *Nemzetközi Könyvfesztivál* Budai-díját, a *Szép Magyar Könyv 2001* Verseny díját és különdíját. Szeptember végén került az iskolákba a sorozat 10. osztályos kötete. A tankönyvek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

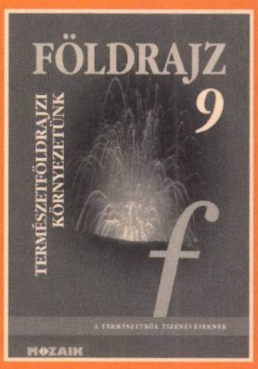


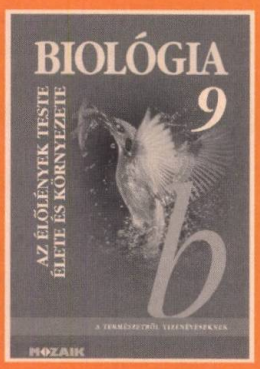
A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

A SZÉP MAGYAR KÖNYV 2001 VERSENY DÍJNYERTES KÖTETEI









MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Hódi Endre (1923-2003)

(Róka Sándor)

A komáromi trükk és egy versenyfeladat

(Csete Lajos)

Testtömegindex

(Török Tamás)

Beszámoló a 2003. évi Gordiusz Matematika Tesztversenyről

(Polcz Katalin – Poronyi Gábor)

XI. ÉVFOLYAM 2003 4

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1200 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltban: Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Hódi Endre (1923–2003)
Róka Sándor főiskolai docens, Nyíregyháza

A komáromi trükk és egy versenyfeladat
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Testtömegindex
Török Tamás főiskolai tanár, Esztergom

Jelentés a 2003. évi Beke Manó-emlékdíjak odaítéléséről

A XXXII. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről
Urbán János tanár, Budapest

Beszámoló a 2003. évi Gordiusz Matematika Tesztversenyről
Polcz Katalin tanár és Poronyi Gábor igazgató, Pécs

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap 2003 – Gyula
Marczis György szaktanácsadó, Gyula

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

Róka Sándor

Hódi Endre (1923-2003)

Hódi Endre középiskolai tanulmányait az 1930-as években az akkor nyolcosztályos, budapesti X. kerületi magyar királyi állami Szent László reálgimnáziumban folytatta, mindvégig kitűnő tanulmányi eredménnyel, az érettségit is beleértve. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok rendszeres feladatmegoldója volt, a legjobbak között. Fényképe a lap 1938. évi decemberi számában található meg.

Az Eötvös József Kollégium tagjaként 1941-től a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem Bölcsészettudományi Karán tanul mennyiségtan-természettan tanárszakon. A legendás Eötvös-kollégium tagjának lenni dicsőség volt, elismerés, amely fokozott felelősséggel is járt. Hódi Endre minden vizsgáját 5-össel tette le, kivéve egy 4-es kémia kollokviumot.

Az egyetemi tanulmányokat a háború és a fogság megszakította. Ez a korszak nekünk, fiatalabbaknak csak elbeszélésekből, történelemórákról, filmekből ismert. Számomra az meseszerű, hogy Bandi bácsi a szakvizsgát 1947-ben matematikából Fejér Lipótnál, fizikából – a későbbi Nobel-díjas – Békésy Györgynél tette le.

Az egyetem, az Eötvös-kollégium hosszú útra és a hazai matematikaoktatás fontos posztjaiba repítette a tehetséges fiatalembert. Hódi Endre alapos felkészültséggel, széles látókörrel, nyíltsággal és a problémák iránti fogékonysággal vágott neki az életnek. Megadatott néki, hogy a hazai matematikaoktatás megújításában, fejlesztésében tevékenykedhessen.

1947–50-ig gimnáziumi tanár és szakfelügyelő, docens a Pedagógiai Főiskolán. A Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztőbizottságának tagja 1950–52-ig. Tudományos munkatárs az Optikai Kutató Laboratóriumban, a Magyar Optikai Művek osztályvezetője, majd műszaki tanácsadója. Tanszékvezető az Országos Pedagógiai Intézet Matematika Tanszékén. Az átszervezés után pedig a Matematikai Nevelési Osztály osztályvezetője volt. Az Országos Pedagógiai Intézetben végzett munkája során végig az iskolai matematikaoktatás fejlesztésének szolgálatát tartotta legfőbb feladatának. Múlhatatlan érdemei vannak abban, hogy a Varga Tamás és munkatársai által kidolgozott komplex matematikatanítási kísérletből kinőtt és a gyakorlatban is bevezetésre került az általános iskolai új matematika tanterv. Ezt a folyamatot éleslátással, jó érzékkel irányította, szervezte. Az OPI-ból ment nyugdíjba, nyugdíjasként is több éven keresztül tanított középiskolában.

Eötvös Loránd írta egy helyen: „Bizonyos dolog, hogy csak az lehet jó tanár, aki maga tudománnyal foglalkozik, mások eszméit is csak az képes helyesen hirdetni, akinek magának is eszméi vannak." Ez érvényes Bandi bácsira is, hiszen még az elmúlt években is foglalkoztatta őt a Hérón-féle háromszögek vizsgálata. Erről a 70-es években írt cikket, amelyre amerikai folyóiratban is találunk hivatkozást.

Munkássága legnagyobb részét az általános és középiskolai matematikaoktatás korszerűsítésére, fejlesztésére, jobbá tételére irányuló törekvése tette ki. Részt vett különböző matematikai tanulóversenyek: OKTV, amerikai verseny, főiskolás versenyek, Nemzetközi Diákolimpia szervezésében és lebonyolításában.

A diákolimpia indulásától kezdve, 1959-től 1987-ig a magyar csapat vezetője, a zsűri tagja. A matematikai diákolimpia rendkívül színvonalas verseny, egyfajta jelzőfény, hogy a legjobb diákokkal milyen magasságokba lehet eljutni.

1979-ben ismerteti meg a magyar matematikatanárokkal az amerikai versenyt, mely akkor még egy nálunk szokatlan versenyforma. Majd 12 év múlva indul el sikeres útjára az ilyen jelle-

gű, feleletválasztós verseny, a Zrínyi Ilona Matematikaverseny. Ez a verseny a matematika ünnepe, hiszen 60-70 ezer gyerek vesz részt rajta. Ilyen létszám egy matematikaversenyen korábban elképzelhetetlen volt.

Hódi Endrét diákkoromban, a könyvein keresztül ismertem meg. Már akkor is kedves folyóiratom volt „A Matematika Tanítása" c. módszertani folyóirat, melynek ő volt a felelős szerkesztője 1974-től 1988 őszéig. Ez a lap most 50 éves, fennállása alatt számtalan érdekes cikk látott napvilágot benne. A 70-es, 80-as években feladatrovata különösen népszerű volt, a határon túli kollégák is meglepően nagy számban küldtek be megoldásokat.

Egyik könyvemnek Hódi Endre volt a lektora. Számomra példamutató volt az a körültekintő alaposság, ahogyan kigyomlálta a kéziratból a hibákat. Zavarba ejtő volt kedves figyelmessége, hogy névnap, ünnepnap alkalmával üdvözlőlappal tisztelt meg.

Hódi Endrét matematika oktatói és népszerűsítő munkájáért a Bolyai János Matematikai Társulat kétszer is Beke Manó-díjban részesítette, és az elmúlt évben örökös tagjává választotta. Gyászolja Bandi bácsit a Bolyai János Matematikai Társulat, és a matematikatanárok széles tábora.

Matematikatanárt gyászolunk, a sokak által tisztelt és szeretett Hódi Endrét. Sokunk Bandi bácsiját. Gondoskodásával, barátságával kitüntetett bennünket. Köszönetet mondunk azért, ami már mindörökre velünk marad, és mostantól mi vagyunk a felelősek, hogy mindörökre itt is maradjon közöttünk. Egy tanár életműve olyan meg nem örökíthető alkotás, amely mégsem múlik el. A tanítványok százai visznek magukkal a világba ebből az életműből egy töredéket, és tovább örökítik azt.

Hódi Endre 20 éve írt megemlékezést Cser Andorról, akinek utóda lett az OPI-ban, és A Matematika Tanításánál. A megemlékezés záró sorai Bandi bácsira is érvényesek. Bandi bácsi szavait idézem, átfogalmazva őrá: „Úgy tűnik, hogy Hódi Endre érdemei, erényei még fényesebben csillognak, mint kapott kitüntetései. Mi - volt munkatársai – mindenesetre dolgos életét, ebben elért eredményeit, érdemeit és erényeit idézzük fel, így őrizzük meg emlékét."

Csete Lajos

A komáromi trükk és egy versenyfeladat

Ábrahám József igazgató úrnak, Nagyné Csáki Klára tanárnőnek és Simon Gyula tanár úrnak ajánlom tisztelettel, akik matematikára tanítottak a Kapuvári Gimnáziumban.

1. Bevezetés

Még 1997-ben a felvidéki komáromi Oláh György tanár úr (akkoriban az Ipari Középiskola, jelenleg a Marianum Egyházi Középiskola tanára) unszolására másfél órás tanórát tartottam a Kárpát-medencéből érkező magyar tanulók és tanárok számára, mások mellett, a Nagy Károly Napok alkalmával.

Mint tudjuk, Nagy Károly jelentős érdemeket szerzett a méterrendszer hazai bevezetésének előkészítésében. Csillagdát építtetett Bicskén, másrészt magyar nyelvű matematikatankönyveket írt és jelentetett meg. [5] ,[6], [7], [8]

E komáromi magyar matematikai találkozón volt szerencsém résztvenni a gútai Fonód Tibor tanár úr óráján. Itt különféle vegyes matematikai problémákat vizsgáltunk. Veres Pál igazgató úrral (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium) eléggé hátul üldögéltünk és amíg a népek egy halmazrendszerrel foglalkozó problémát elemeztek a feladatsor elején, addig mi a feladatsorban hátrébb szereplő problémákat vizsgál-

tunk. Veres igazgató úr egy tetraéderes feladat megoldásával foglalkozott és hamarosan felvázolta nekem a megoldását. Nem volt kedvem belekapni a térgeometriába, ezért elkezdtem a kapott feladatsoron levő következő egyenlőtlenség bizonyítását:

Legyenek $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív valós számok. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_0} \geq x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Később Fonód tanár úr teljes négyzetté való kiegészítéssel igazolta az egyenlőtlenséget.

Utána a miskolciak egyik tanulója mutatta be az egyenlőtlenség megoldását a rendezési egyenlőtlenség segítségével (alighanem Gulyás Tibor tanár úr egyik tanítványa, Földes Ferenc Gimnázium).

Korábban a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenség alkalmazásáról tartottam órát e komáromi találkozón. Így a beállítódás iskolapéldájaként a Cauchy-féle (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle) egyenlőtlenség segítségével sikerült igazolnom az egyenlőtlenséget.

Majd hazautazva néhány hét múlva otthon ismét elővettem a Komáromban vizsgált egyenlőtlenséget és egy újabb megoldást próbáltam keresni.

Ekkor született meg a „komáromi trükk", amely bár roppant egyszerű, még nem olvastam a szakirodalomban.

2. A komáromi trükk

Hosszas kísérletezés után arra gondoltam, hogy a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget próbálom meg alkalmazni. Mivel ez n-re nem vezetett előre, ezért n = 2-re próbáltam meg többször alkalmazni. Ehhez viszont szükség volt a kiegészítés ötletére.

Az új módszert rögtön az előző egyenlőtlenség egy általánosításának bizonyításánál alkalmazzuk.

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív valós számok és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ az előző számok egy tetszőleges sorrendje. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

(Gondolom nem okoz gondot, hogy ez nem $n + 1$ számra, hanem csak n darab számra van felírva.)

Bizonyítás a komáromi trükkel:

Adjunk az $\frac{x_i^2}{y_i}$ -hez y_i-t, hogy a mértani középnél majd eltűnjön az y_i.

Alkalmazzuk most a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív

$$\frac{x_i^2}{y_i} \quad \text{és} \quad y_i$$

számokra, kapjuk, hogy:

$$\frac{\frac{x_i^2}{y_i} + y_i}{2} \geq \sqrt{\frac{x_i^2}{y_i} \cdot y_i} = \sqrt{x_i^2} = x_i$$

Azaz

$$\frac{x_i^2}{y_i} + y_i \geq 2 \cdot x_i$$

Most ezt az egyenlőtlenséget alkalmazzuk $i = 1, 2, \ldots, n$-re, majd adjuk össze ezen egyenlőtlenségeket és kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{x_1^2}{y_1} + y_1\right) + \left(\frac{x_2^2}{y_2} + y_2\right) + \ldots + \left(\frac{x_n^2}{y_n} + y_n\right) \geq$$
$$\geq 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + 2 \cdot x_n$$

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \geq$$
$$\geq 2 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Most vegyük figyelembe, hogy $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, hiszen az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok éppen az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számoknak egy sorrendje. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geq$$
$$\geq 2 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Vagyis valóban fennáll az

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

egyenlőtlenség.

Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$\frac{x_i^2}{y_i} = y_i$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$ –re teljesül.

Ebből következik, hogy $x_i^2 = y_i^2$ és mivel x_i és y_i pozitív számok, ezért teljesül, hogy $x_i = y_i$.

Azt kaptuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn az egyenlőtlenségben, ha

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

3. A komáromi trükk alkalmazása egy OKTV versenyfeladaton

2001 novemberében ismét a komáromi Nagy Károly Napokra készültem. S miközben az utazás előtti napon próbáltam felkészülni az előadásomra – amelynek témája egy Catalan-féle egyenlőtlenség volt –, véletlenül a kezembe került a KöMaL 2001. novemberi száma. Itt az Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai között a 469. oldalon feltűnt a következő egyenlőtlenség, amely az általános tantervű gimnáziumok harmadik (döntő) fordulójának harmadik (utolsó) feladata volt:

Bizonyítsuk be, hogy az a_1, a_2,...., a_n pozitív valós számokra teljesül az

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

egyenlőtlenség.

Mivel a Catalan-féle egyenlőtlenség egyik bizonyításában felhasználtam a komáromi trükköt, feltűnt, hogy talán ez a probléma is alkalmas arra, hogy megoldjuk a komáromi trükkel.

Először mechanikusan próbáltam alkalmazni a trükköt:

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív

$$\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}}$$

és $a_i + a_{i+1}$ számokra.

$$\frac{\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} + (a_i + a_{i+1})}{2} \geq \sqrt{\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \cdot (a_i + a_{i+1})} = \sqrt{a_i^2} = a_i$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} + (a_i + a_{i+1}) \geq 2 \cdot a_i$$

Ha ezt alkalmazzuk $i = 1, 2, \ldots, n$-re, majd összeadva, figyelembe véve az $a_{n+1} = a_1$ megállapodást, kapjuk kis rendezés után, hogy:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \geq 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Azaz

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq 0.$$

Ez amúgy is nyilvánvaló egyenlőtlenség.

Próbáljuk meg kissé ravaszabbul alkalmazni a komáromi trükköt.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív

$$\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \text{ és } \frac{1}{4} \cdot (a_i + a_{i+1})$$

számokra.

$$\frac{\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} + \frac{1}{4} \cdot (a_i + a_{i+1})}{2} \geq \sqrt{\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \cdot \frac{1}{4} \cdot (a_i + a_{i+1})} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot a_i^2} = \frac{1}{2} \cdot a_i$$

Ebből

$$\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} + \frac{1}{4} \cdot (a_i + a_{i+1}) \geq a_i.$$

Ha ezt alkalmazzuk $i = 1, 2, \ldots, n$-re, majd összeadva, figyelembe véve az $a_{n+1} = a_1$ megállapodást kapjuk, hogy:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$
$$+ \frac{a_n^2}{a_n + a_1} + \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + 2 \cdot a_n) \geq$$
$$\geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Ebből azonnal nyerjük kivonás után, hogy

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$
$$+ \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

2001. november 18-án vasárnap a hazautazás előtt előadtam a Catalan-egyenlőtlenséget és a komáromi trükköt, így a közönség létszáma szerencsés módon csak 7 fő volt, közöttük két tanárral.

Amikor a felvidéki Komáromban elmeséltem a komáromi trükköt és éppen az előbbi OKTV problémát vetettem fel, a hallgatóság közül dr. Kiss Géza tanár úr, a kiváló feladatmegoldó (Kisújszállás, Móricz Zsigmond Gimnázium) egyszerre rájött a komáromi trükk ravaszabb alkalmazására, habár ekkor már majdnem másfél órája fárasztottam a közönséget, akik szegények olyan kevesen voltak, hogy egyikük sem mert megszökni idő előtt.

Felmerül a kérdés, hogy ezen a módon lehet-e még javítani az $\frac{1}{2}$ tényezőt.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív

$$\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \text{ és } x^2 \cdot (a_i + a_{i+1})$$

számokra.

Kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} + x^2 \cdot (a_i + a_{i+1})}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \cdot x^2 \cdot (a_i + a_{i+1})} = \sqrt{x^2 \cdot a_i^2} = x \cdot a_i$$

Ebből

$$\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} + x^2 \cdot (a_i + a_{i+1}) \geq 2 \cdot x \cdot a_i$$

Ha ezt alkalmazzuk $i = 1, 2, \ldots, n$-re, majd összeadva, figyelembe véve az $a_{n+1} = a_1$ megállapodást kapjuk, hogy:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$
$$+ \frac{a_n^2}{a_n + a_1} + 2 \cdot x^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 2 \cdot x \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$
$$+ \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq (2 \cdot x - 2 \cdot x^2) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Könnyen megállapíthatjuk, akár többféle egyszerű módon is, hogy az $f(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot x^2$ függvény maximumhelye $x = \frac{1}{2}$ -nél van, míg maximumértéke $\frac{1}{2}$.

(Például úgy határozhatjuk meg ezt gyorsan, ha észrevesszük, hogy a másodfokú függvény főegyütthatója negatív, ezért grafikonja lefelé nyíló parabola. Míg zérushelyei $x = 0$ illetve $x = 1$, tehát a parabola tengelye az $x = \frac{1}{2}$ egyenletű egyenes.)

Tehát ezzel a módszerrel nem lehet tovább javítani az $\frac{1}{2}$ tényezőt.

4. A versenyfeladat egy ismert megoldása

Felmerül a következő kérdés: vajon a matematikai versenyzők hogyan igazolták az előbb vizsgált egyenlőtlenséget? A választ nem tudom, de gondolom, hogy nem a komáromi trükkel, hanem például a következő ismert hagyományos módszerrel.

Használjuk fel a következő elemi egyenlőtlenséget:

$$\frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i + a_j} \geq \frac{a_i + a_j}{2}$$

(Ezt könnyen igazolhatjuk, ha beszorzunk a nevezőkkel és nullára rendezünk, majd teljes négyzetet alakítunk ki.)

Másrészt figyeljük meg a következő azonosságot:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$

$$+ \frac{a_n^2}{a_n + a_1} - \left(\frac{a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_1^2}{a_n + a_1} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - a_{i+1}^2}{a_i + a_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = 0$$

Ebből következik, hogy

$$S = \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$

$$+ \frac{a_n^2}{a_n + a_1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + a_{i+1}^2}{a_i + a_{i+1}}$$

Alkalmazzuk most ez előbb említett egyenlőtlenséget és kapjuk, hogy

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + a_{i+1}^2}{a_i + a_{i+1}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i+1}) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Ezzel ismét igazoltuk a versenyfeladat egyenlőtlenségét.

Ezen utóbbi megoldás L. Panaitopol – V. Bândilă – M. Lascu: *Egyenlőtlenségek*, GIL Könyvkiadó, Zilah, 1996. (fordító András Szilárd) műve alapján készült, ahol a 28. oldalon tűzik ki a versenyfeladatot 2.60. sorszámon, míg a megoldása a könyv 49. oldalán olvasható.

E könyv névmutatójában bukkanhatunk R. P. Usakov nevére, akitől átvették a könyv szerzői a 2.60. problémát. [3]

R. P. Usakov neve már ismerős volt, ugyanis korábban kitűztem szakkörének egy problémáját az Abacus folyóiratban. Az 1990-es évek elején a kijevi 173. számú iskola matematikatanáraként működött és az iskola matematikaszakkörét vezette, ezenkívül számos problémát tűzött ki a Matematika v Skole folyóiratban.

Később (miközben valami mást kerestem) véletlenül megtaláltam a probléma következő változatát:

Bizonyítsuk be, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok összege 1, akkor teljesül az

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenség.

Ezt a problémát bizonyos D. Terjosin tűzte ki 1990-ben egy szovjet matematikai olimpián a 10. osztályosok számára. [2] Az itt közölt megoldás megegyezik az előző ismert bizonyítással.

A [9] cikk szintén tartalmazza e feladatot az előző kitűző nevével. Míg a megoldási útmutatásban azt írják, hogy minden pozitív valós b és c számra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{b^2}{b + c} \geq \frac{3 \cdot b - c}{4},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $b = c$.

Ezt alkalmazzuk a $b = a_i$, $c = a_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) és $a_{n+1} = a_1$ számokra, majd ezeket összeadva megkapjuk a keresett egyenlőtlenséget. Ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}.$$

Arthur Engel 1998-as könyvében [1] az egyenlőtlenség a következő alakban van kitűzve a megfelelő számokra:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ennek megoldását az előbb már leírt módon az

$$\frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i + a_j} \geq \frac{a_i + a_j}{2}$$

egyenlőtlenség segítségével adja meg.

5. A versenyfeladat megoldása Cauchy-féle egyenlőtlenséggel

Egy következő hagyományos megoldási lehetőség lehet a Cauchy-féle egyenlőtlenség alkalmazása. (Szokták Cauchy-Schwarz-féle, vagy Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenségnek is nevezni.)

Mint tudjuk, a Cauchy-féle egyenlőtlenség szerint tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ valós számokra fennáll, hogy

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2$$

és ha az y_i-k nem mind nullák, az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, hogy $x_1 = \lambda \cdot y_1$, $x_2 = \lambda \cdot y_2, \ldots, x_n = \lambda \cdot y_n$.

Legyen

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_i + a_{i+1}}} \text{ és } y_i = \sqrt{a_i + a_{i+1}},$$

ha $i = 1, 2, \ldots, n$, figyelembe véve az $a_{n+1} = a_1$ egyenlőséget. Ezeket behelyettesítve a Cauchy-féle egyenlőtlenségbe, kapjuk, hogy:

$$\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1 + a_2}} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_2 + a_3}} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n + a_1}} \right)^2 \right) \cdot \left(\left(\sqrt{a_1 + a_2} \right)^2 + \left(\sqrt{a_2 + a_3} \right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{a_n + a_1} \right)^2 \right) \geq$$

$$\geq \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1 + a_2}} \cdot \sqrt{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2 + a_3}} \cdot \sqrt{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n + a_1}} \cdot \sqrt{a_n + a_1} \right)^2$$

azaz

$$\left(\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \right) \cdot 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

s ezzel ismét igazoltuk a versenyfeladat egyenlőtlenségét.

6. Egy újabb ismert megoldás

A következőkben azt a fogást alkalmazzuk, amelyet a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium matematika munkaközössége használt egy újságban megjelent felvételi előkészítő tanfolyam egyik példája megoldásakor (2002. január 30.) (A példa lényegében az OKTV versenyfeladat volt $n = 3$ változóra.)

Abból indulunk ki, hogy

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} = \frac{a_1^2 + a_1 a_2 - a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{a_1(a_1 + a_2) - a_1 a_2}{a_1 + a_2} = a_1 - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

Ezt alkalmazva a többi megfelelő tagra:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} - \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} - \ldots - \frac{a_n a_1}{a_n + a_1}$$

Alkalmazzuk sorban a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a jobb oldal törtjeinél:

$$\geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \frac{a_1 a_2}{2 \cdot \sqrt{a_1 a_2}} -$$

$$- \frac{a_2 a_3}{2 \cdot \sqrt{a_2 a_3}} - \ldots - \frac{a_n a_1}{2 \cdot \sqrt{a_n a_1}} =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{2} - \frac{\sqrt{a_2 a_3}}{2} - \ldots - \frac{\sqrt{a_n a_1}}{2}$$

Majd újra alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az alsó becslésre.

$$\geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \frac{a_1 + a_2}{4} - \frac{a_2 + a_3}{4} - \ldots -$$

$$- \frac{a_n + a_1}{4} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Ezzel igazoltuk az egyenlőtlenséget. Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

7. A versenyfeladat megoldása súlyozott közepekkel

Ismeretes a súlyozott számtani és a súlyozott harmonikus közép közötti tétel.

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok és ezek mindegyikéhez egy-egy $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pozitív valós számot, úgynevezett súlyt rendelünk. Ekkor

$$\frac{s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_n a_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \geq \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \ldots + \frac{s_n}{a_n}}$$

Vagyis a súlyozott számtani közép nem kisebb, mint ugyanazon számok ugyanazzal a súlyokkal vett harmonikus közepe. [4]

Vegyük észre, hogy

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} =$$

$$= a_1 \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2} + a_2 \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + a_n \cdot \frac{a_n}{a_n + a_1}$$

Ebből arra gondolhatunk, hogy a súlyok legyenek az $a_1, a_2, \ldots a_n$ számok, míg maguk a számok, amelyekre alkalmazzuk a súlyozott számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}, \frac{a_2}{a_2 + a_3}, \ldots, \frac{a_n}{a_n + a_1}$$

Így

$$\frac{a_1 \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2} + a_2 \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + a_n \cdot \frac{a_n}{a_n + a_1}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \geq$$

$$\geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_1 \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1} + a_2 \cdot \frac{a_2 + a_3}{a_2} + \ldots + a_n \cdot \frac{a_n + a_1}{a_n}}$$

Vagyis

$$\frac{\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \geq$$

$$\geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}$$

Tehát

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$

$$+ \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Ezzel ismét igazoltuk az egyenlőtlenséget.

8. A versenyfeladat megoldása teljes négyzetté való kiegészítéssel

$$0 \leq \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1 + a_2}} - \frac{\sqrt{a_1 + a_2}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} - a_1 + \frac{a_1 + a_2}{4}$$

$$0 \le \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_2 + a_3}} - \frac{\sqrt{a_2 + a_3}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{{a_2}^2}{a_2 + a_3} - a_2 + \frac{a_2 + a_3}{4}$$

...

$$0 \le \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n + a_1}} - \frac{\sqrt{a_n + a_1}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{{a_n}^2}{a_n + a_1} - a_n + \frac{a_n + a_1}{4}$$

Összeadva ezt az n darab egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{{a_1}^2}{a_1 + a_2} + \frac{{a_2}^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{{a_{n-1}}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$

$$+ \frac{{a_n}^2}{a_n + a_1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \ge 0$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\frac{{a_1}^2}{a_1 + a_2} + \frac{{a_2}^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{{a_{n-1}}^2}{a_{n-1} + a_n} +$$

$$+ \frac{{a_n}^2}{a_n + a_1} \ge \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Ezzel ismét igazoltuk az OKTV versenyfeladat egyenlőtlenségét. Gondoljuk meg az egyenlőség esetét itt is, és a többi megoldásnál is, ahol ezt nem vizsgáltuk meg.

A cikkben leírt témát volt szerencsém elmesélni kissé másként a 2002. évi Rátz László Vándorgyűlésen Győrben.

Irodalom és jegyzetek

[1] Engel, Arthur: *Problem-Solving Strategies,* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1998. 185. oldal, 84. feladat, megoldása a 202. oldalon.

[2] Kuznyecova, G. M. – I. N. Szergejev: XXIV Vszeszojuznaja matematicseszkaja olimpiada skolnyikov, Matematika v Skole, 90/6. 49-55. old., különösen a 49. és az 52. oldal.

[3] Panaitopol, L. – V. Bändilä – M. Lascu: Egyenlőtlenségek, GIL Könyvkiadó, Zilah, 1996. (fordító András Szilárd)

[4] Reiman István: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák* 1995–1998. Typotex, Budapest, 1998. Itt az 1995/2. számú feladat: *Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre* $a \cdot b \cdot c = 1$ *teljesül. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{a^3 \cdot (b + c)} + \frac{1}{b^3 \cdot (c + a)} + \frac{1}{c^3 \cdot (a + b)} \ge \frac{3}{2}$$

E probléma megoldásait a könyv 25-28. oldalain olvashatjuk, a 26. oldalon levő 2. megoldásból vettük a súlyozott számtani és harmonikus közép ötletét. A súlyozott közepekről olvashatunk a könyv 73-74. oldalain (bizonyítások nélkül).

[5] Oláh György: Nagy Károly, KöMaL, 1999/2. 75. oldal

[6] Oláh György: Nagy Károly, In: Magyar tudóslexikon A-tól Zs-ig, (főszerkesztő Nagy Ferenc), Better-MTESZ-OMIKK, 1997. utánnyomás 1998., 594. oldal

[7] Vargha Domokosné: Országmegváltó tervek, Élet és Tudomány, 1998. április 3., 14. szám, 428-431. old. (Nagy Károlyról)

[8] Vargha Domokosné: A „nagy ábránd", Élet és Tudomány, 1998. április 24. 17. szám, 518-521. oldal (Nagy Károlyról)

[9] Vavilov, V. – Sz. Rezicsenko, XXIV Vszeszojuznaja olimpiada po matematike, Kvant, 90/11. 58-60. oldal, különösen az 59. oldal. A megoldásvázlatok a Kvant 90/12. 72-75. oldalain, az idevágó rész a 73. oldalon.

Török Tamás

Testtömegindex

„Kisebb mértékű súlytöbblet kevésbé veszélyezteti az egészségünket, mint a túlzott alkoholfogyasztás és a mértéktelen dohányzás. A néhány kilogrammnyinál nagyobb túlsúly, az elhízás azonban szintén veszélyekkel jár, a szív és érrendszeri betegségek esetében fölér napi egy csomag cigaretta elszívásának kárával" – írja Pados Gyula, a Szent Imre Kórház főorvosa (a Népszabadság 2001. augusztus 7-i számában).

Bizonyára sokan ismerik, és el is végezték már saját magukon vagy ismerőseiken azt az egyszerű próbát, miszerint a testsúly (pontosabban a kg-ban kifejezett testtömeg) megközelítőleg akkor ideális, ha 100-zal kevesebb a cm-ben megadott testmagasságnál. Az orvosi szakirodalomban *Broca-féle képletnek* nevezett $t_{id} \approx m - 100$ összefüggés nem ad felvilágosítást arra, hogy a testtömeg valódi értéke milyen mértékben haladhatja meg a t_{id}-t ahhoz, hogy – az elhízás szempontjából – még normális, elfogadható testtömegről beszélhessünk.

Korszerűbb és használhatóbb támponthoz jutunk a szintén orvosok által kidolgozott ún. *testtömegindex* (BMI – Body Mass Index) alábbi kiszámításával:

$$\beta = \frac{t}{\left(\frac{m}{100}\right)^2},$$

ahol β a testtömegindexet, t (kg) a testtömeget és m (cm) a testmagasságot jelöli. Eszerint, ha egy személy 68 kg, akkor testtömegindexe 22.7, ha pedig 92 kg, akkor testtömegindexe 30.7.

Az orvostudomány a β mutató adott intervallumba eső értékétől függően tekinti a vizsgált személy testtömegét normálisnak vagy állapítja meg éppenséggel a túlsúly, illetve az orvosi értelemben vett elhízás tényét:

A vizsgált személy				
normális testtömegű	enyhén túlsúlyos	mérsékelten elhízott	komolyan elhízott	betegesen elhízott
$20 \le \beta < 25$	$25 \le \beta < 27$	$27 \le \beta < 31$	$31 \le \beta < 45$	$45 \le \beta$

A saját β-ját t és m ismeretében bárki könnyedén kiszámíthatja, és összevetheti a fenti táblázatban megadott értékekkel. A következő táblázatból (160 és 200 cm közötti testmagassági tartományban) számítás nélkül is megtudhatjuk, hogy magasságunkhoz képest legfeljebb mekkora lehet a testtömegünk normális esetben, vagy legalább hány kg-ot kellene fogynunk az „enyhén túlsúlyos", illetve a „mérsékelten elhízott" minősítéshez. *(1. táblázat)*

(A táblázatban szereplő intervallumok zártak, azaz a „tól" és „ig" értékek is beleértendők az egyes intervallumokba.)

A táblázatot szemlélve megállapíthatjuk, hogy a testtömeg annál tágabb intervallumban tekinthető normálisnak, minél nagyobb a testmagasság. Például 160 cm-es testmagasságnál ez az intervallum [51, 64], 185 cm-es magasságnál pedig [68, 85]. A két intervallum hossza, terjedelme tehát 13 kg (64 - 51), illetve 17 kg (85 - 68).

Ennek anatómiai szempontból nyilván az az oka, hogy ugyanakkora testtömeg gyarapodás a magasabb embereknél kevésbé észrevehető (a relatív térfogatgyarapodás kisebb), mint az alacsonyabbaknál.

Test-magasság	Normális testtömeg	Enyhe túlsúly	Mérsékelt elhízás	Komoly elhízás	Kóros elhízás
160	51-63	64-69	70-79	80-115	>116
161	52-64	65-70	71-80	81-117	>118
162	52-65	66-71	72-81	82-118	>119
163	53-66	67-72	73-82	83-120	>121
164	54-67	68-73	74-83	84-121	>122
165	54-68	69-74	75-84	85-123	>124
166	55-68	69-74	75-85	86-124	>125
167	56-69	70-75	76-86	87-126	>127
168	56-70	71-76	77-87	88-127	>128
169	57-71	72-77	78-89	90-129	>130
170	58-72	73-78	79-90	91-130	>131
171	58-73	74-79	80-91	92-132	>133
172	59-73	74-80	81-92	93-133	>134
173	60-74	75-81	82-93	94-135	>136
174	61-75	76-82	83-94	95-136	>137
175	61-76	77-83	84-95	96-138	>139
176	62-77	78-84	85-96	97-139	>140
177	63-78	79-85	86-97	98-141	>142
178	63-79	80-86	87-98	99-143	>144
179	64-80	81-87	88-99	100-144	>145
180	65-80	81-87	88-100	101-146	>147
181	66-81	82-88	89-102	103-147	>148
182	66-82	83-89	90-103	104-149	>150
183	67-83	84-90	91-104	105-151	>152
184	68-84	85-91	92-105	106-152	>153
185	68-85	86-92	93-106	107-154	>155
186	69-86	87-93	94-107	108-156	>157
187	70-87	88-94	95-108	109-157	>158
188	71-88	89-95	96-110	111-159	>160
189	71-89	90-96	97-111	112-161	>162
190	72-90	91-97	98-112	113-162	>163
191	73-91	92-98	99-113	114-164	>165
192	74-92	93-100	101-114	115-166	>167
193	74-93	94-101	102-115	116-168	>169
194	75-94	95-102	103-117	118-169	>170
195	76-95	96-103	104-118	119-171	>172
196	77-96	97-104	105-119	120-173	>174
197	78-97	98-105	106-120	121-175	>176
198	78-98	99-106	107-122	123-176	>177
199	79-99	100-107	108-123	124-178	>179
200	80-99	100-107	108-123	124-179	>180

1. táblázat

Matematikai szempontból β normalitása a

$$20 \le \frac{t}{\left(\frac{m}{100}\right)^2} < 25$$

egyenlőtlenségpár teljesülését jelenti, amelyet átalakítva a

$$\frac{20}{10^4} m^2 \le t < \frac{25}{10^4} m^2$$

összefüggést kapjuk. A t-re kifejezett terjedelem

$$\frac{25}{10^4} m^2 - \frac{20}{10^4} m^2 = \frac{5}{10^4} m^2,$$

amely m-nek szigorúan monoton növekvő függvénye bármely pozitív intervallumban.

Szintén felfedezhetjük a táblázatban, hogy az egyes testmagasságokhoz tartozó, *Broca-féle* értelemben vett ideális testtömeg minden esetben a normális testtömeg kategóriájába esik, mégpedig annak a felső határát súrolja vagy el is éri. Ha ez a nyilvánvaló elvárás nem teljesülne, akkor ez azt jelentené, hogy $t_{id} \approx m - 100$ és a $20 \le \beta < 25$ összefüggés közül valamelyik hibás lenne.

Vizsgáljuk meg most matematikailag, hogy a *Broca-féle* ideálisnak nevezett testtömeg vajon minden testmagassági kategóriában a testtömeg index alapján számított normális testtömeg kategóriába esik-e!

Ha egy személy t testtömege ideális, akkor $(m - 100)$-zal helyettesíthető, így testtömeg indexe:

$$\beta = \frac{m - 100}{\left(\frac{m}{100}\right)^2} = \frac{10^4 m - 10^6}{m}.$$

Ebben az esetben β normalitása azt jelenti, hogy:

$$\text{I. } \frac{10^4 m - 10^6}{m^2} < 25 \text{ és II. } \frac{10^4 m - 10^6}{m^2} \ge 20.$$

Az I. egyenlőtlenséget 0-ra rendezve kapjuk: $25m^2 - 10^4 m + 10^6 > 0$. A bal oldal teljes négyzet: $(5m - 10^3)^2$, ezért I. ($m = 200$ kivételével) minden m-re igaz.

Ha $m = 200$, akkor

$$\beta = \frac{200 - 100}{\left(\frac{200}{100}\right)^2} = 25.$$

A II. egyenlőtlenség 0-ra rendezve: $20m^2 - 10^4 m + 10^6 \le 0$ alakú. Egyszerűsítés után a $2m^2 - 10^3 m + 10^5 = 0$ egyenlet megoldása:

$$m_{1,2} = \frac{10^3 \pm \sqrt{10^6 - 8 \cdot 10^5}}{4} =$$

$$= \frac{10^3 \cdot (1 \pm \sqrt{0,2}}{4} = 250 \cdot (1 \pm \sqrt{0,2})$$

Tekintettel arra, hogy a II. egyenlőtlenség bal oldala egy felfelé nyíló parabola, a II. megoldása: $139 \le m \le 361$.

A I. és II. egyenlőtlenségre kapott eredmények felhasználásával megállapíthatjuk, hogy a *Broca-féle* ideális testtömeg (orvosi értelemben)

- 200 cm-es testmagasságnál nagyon enyhe túlsúlyt jelent ($\beta = 25$)?
- minden, 138 cm-nél nagyobb testmagasságnál normális testtömeget jelent ($20 \le \beta < 25$)?
- 138 cm-nél kisebb (gyermeki) testmagasságnál a normálist meghaladó testtömeget jelent ($\beta > 25$)?

Valószínűleg a *Broca-féle* képlet gyerekek esetén nem működik, rájuk valamilyen más összefüggés érvényes. Nincs tudomásom arról, hogy a testtömeg indexnek vannak-e hasonló testmagassági vagy életkori korlátai.

Jelentés a 2003. évi Beke Manó-emlékdíjak odaítéléséről

A Beke Manó-Emlékdíj Bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta:

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül:
Dobos Sándor

Dobos Sándor a Szent István Gimnázium speciális matematika tagozatán érettségizett. Az egyetem elvégzése óta a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára, ahol mind normál tantervű, mind speciális matematika tagozatos osztályokat tanít eredményesen.

Nagyszerű pedagógus. Belső indíttatásból folyamatosan továbbképzi magát, az alkotómunka a lételeme. Színvonalas feladatgyűjtemények összeállításával segíti a tehetséges gyerekek képzését. Szakmai tudását kiemelkedő módszertani kultúrája és empatikus készsége következtében nagy hatásfokkal adja át tanítványainak. Tagja az OKTV II. kategória bizottságának, sokáig – Reiman István mellett – segítette, ma már irányítja a diákolimpiai csapat kiválasztását és felkészítését.

Érzékeny, intelligens, sokoldalúan művelt ember. Halk szavú, de határozott véleményével tanítványai körében is népszerűvé vált. Hiteles személyisége az általa közvetített értékek befogadására készteti a gyerekeket. Keze alól a világra nyitott, tevékeny, önmagukkal szemben igényes diákok kerülnek ki. Tanítványainak nyaranta kerékpártúrát szervez az országhatáron belüli és azon túli természeti kincsek és hagyományok felkutatására. Sokoldalúságát bizonyítja, hogy énekel a Szent István Király Oratóriumkórusban és az iskola énekkarában is.

A határon túli diákok számára lehetőségek sorát igyekszik biztosítani a matematikatanulás és az anyaországgal való kapcsolattartás terén kölcsönös látogatások, közös táborozások, versenyek formájában.

Fiatal kora ellenére a már eddig létrehozott „életműve" indokolja a Beke Manó-díj odaítélését.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül:
Halász Ágnes

Halász Ágnes 1973-ban szerzett tanári diplomát az ELTE-n. Már egyetemista korában kitűnt szorgalmával, jó képességével, a szakmódszertani kérdések iránti érdeklődésével. Mint egyetemi hallgató tanított a kőbányai Szt. László Gimnáziumban.

Az egyetem elvégzése után dolgozott általános iskolában is. Több, mint 20 éve tanít a Bolyai János Textilipari Szakközépiskolában (ill. utódjában, a Zsigmond Téri Gimnázium és Szakközépiskolában). Évek óta oktat a budapesti Eötvös Gimnáziumban is, általában emelt óraszámú csoportokban. Ilyen módon teljes áttekintése van a 10 -18 éves tanulók életkori sajátosságairól, a leggyengébbekkel és a legjobbakkal való foglalkozás lehetőségeiről, módszereiről. Nagy tapasztalata alapján lett az Fővárosi Pedagógiai Intézet matematika szaktanácsadója. Ezt a munkát is, mint minden megbízást lelkiismeretesen, a pedagógusok és az iskolavezetők nagy megelégedésére végezte, komoly segítséget nyújtva kollégáinak.

A gyengék eredményes tanítására kidolgozott módszerét különböző előadásokon, köztük

a Rátz László vándorgyűlésen is ismertette, s cikket is írt a témáról. Alapvetőnek tartja, hogy minden gyerek jusson sikerélményhez, merjen kérdezni. A tanulók aktivitásának elérésére különböző módszereket, köztük vitát, játékot is alkalmaz.

Minden előadásából kiderül, mennyire fontosnak tartja, hogy a tanár jól ismerje tanítványait. Mint szaktanácsadó méréstechnikával, feladatlapok összeállításával is foglalkozott. Versenyek zsűrijében, versenydolgozatok javításában is részt vesz.

Rendszeresen továbbképzi magát.

Szerepel az Fővárosi Pedagógiai Intézet szaktanácsadói listáján, és az országos szakértői listán.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül: **Dr. Iharos Csabáné**

Dr. Iharos Csabáné Kaposváron született, általános, majd középiskolai tanulmányait is itt végezte. 1966-ban végzett a Zeneművészeti Főiskolán, majd 1970-ben fejezte be tanulmányait az ELTE matematika tanári szakán. 1968 óta tanít a kaposvári Táncsics Mihály Gimnáziumban. A kezdetek óta részt vesz a speciális, illetve az emelt szintű matematikai osztályok tanításában. Tanítványai rendszeresen szerepelnek az Arany Dániel és az OKTV döntőkön, s több díjat kaptak, illetve az OKTV-n 1-10 helyezést értek már el. Ugyancsak jól szerepelnek a KÖMAL feladatmegoldó versenyein is.

Sok energiát fordít arra, hogy tanítványai ne csak bejussanak az egyetemekre, főiskolákra, hanem ott helyt is álljanak. A szinte minden hétvégére feladott házi dolgozatokat egy napon belül kijavítja. Igyekszik elérni, hogy a matematika a tanítványai számára is szép muzsikává álljon össze.

Munkájában a magas szintű szakmai tudás és a gyerekek iránti szeretet szerencsésen ötvöződik. Munkája elismeréséül 1985-ben Kiváló Munkáért állami kitüntetésben részesült, majd 2002-ben a Graphisoft Aapítvány a Matematika Oktatásáért díját kapta.

A Beke Manó-díj második fokozatát kapja: **Kuti Gusztávné**

Kuti Gusztávné az esztergomi tanítóképző elvégzését követően az ELTE BTK pedagógia szakán szerzett diplomát, majd a zugligeti 12 évfolyamos Arany János iskolában tanított. 1981-től a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola vezetőtanítója lett. A sokéves kiemelkedő gyakorlati tanítást követően 1986-tól a Fővárosi Pedagógiai Intézet alsós vezető-szaktanácsadója, s hozzá tartozik a főváros, majd az egész ország alsós matematikai nevelésének gondozása is. Kuti Gusztávné 1992-től a „Tanítók a Gyermekekért" egyesület vezetőjeként irányította azt a teljesen egyedi versenyt, mely a tanítóknak szólt, és lényege a jó szemléletű, hibátlan szakmai felkészültséget igazoló írásbeli, szóbeli és gyakorlati tanítói munka bemutatása. Bemutató órák sokaságát tartotta és szervezte. Írásai, cikkei, könyvei, tanulmányai nemcsak gyermekbarát szemléletét, hanem empátiáját, elhivatottságát és maximális, naprakész felkészültségét igazolják. Munkáját, szakmai megjelenését a barátságos elegancia és a mérhetetlen igényesség jellemzi. Továbbképzései, előadásai, az általa vezetett szakmai beszélgetések nemcsak az alsósok számára kínáltak mindig újdonságokat, hanem számtalan esetben a felső tagozatos, sőt a középiskolás továbbképzéseken is meglepték a résztvevőket. Országos jelentőségű munkái között kiemelkedő a matematika tantervírás. Számtalan továbbképzésen igazolta az alsós tehetséggondozás, ugyanakkor a felzárkóztatás iránt érzett elkötelezettségét.

„Szeretnék hitet és önbizalmat önteni... a kollégák lelkébe és rávezetni őket arra, hogy

az ügy iránti alázat és a kisgyermekek szeretete nélkül nem érdemes dolgozni."– nyilatkozta Kuti Gusztávné és teszi ma is felelősségteljes dolgát ebben a hitben és szeretetben.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül:
Marosszéki Gábor

Marosszéki Gábor 2000 augusztusától tagja a Salgótarjáni Bolyai János Gimnázium nevelő közösségének. Előtte a Borbély Lajos Műszaki Középiskola, majd a Táncsics Mihály Közgazdasági és Kereskedelmi Szakközépiskola tanára volt.

Középiskolai tanulmányait is a Bolyai János Gimnáziumban végezte, majd az egri tanárképző főiskola matematika szakára járt. Tanulmányait a KLTE matematika kiegészítő szakán folytatta, ezt befejezve visszatért Salgótarjánba.

Tanárként szívügye a versenyeztetés, a tehetséggondozás, a szaklapok feladatmegoldása. A szakmunkástanulók megyei és országos matematika versenyén mindig voltak tanítványai, kezdetek óta készít fel tanulókat a Peák István Matematika versenyre, aminek fő szervezője is. Tanítványai szinte minden matematika tárgyú versenyen (Varga Tamás, Zrínyi Ilona, Gordiusz, Abacus, Kenguru) ott vannak, közülük sokan az élmezőnyben.

Sok időt és energiát fordít tanulói felkészítésére: délutáni szakkörök, versenyfelkészítők, táborok formájában. Oktat fakultációs csoportokat, emelt óraszámú osztályokat. Előadásokat szervez tanítványai és kollégái számára. Egy éve az iskola matematika munkaközösségének vezetője. Színvonalas szakmai munkáját kollégái elismerik.

Tagja a Bolyai János Matematika Társulatnak, annak irányításában megyei szinten évek óta részt vesz. A versenyről, az eredményekről, a kitűzött feladatokról és azok megoldásairól több évben is kiadványt szerkesztett. 2002-ben a Bolyai évforduló kapcsán vetélkedőt szervezett a megye középiskolái számára Bolyai életéről, munkásságáról.

Olyan pedagógus, akinek mindene a matematika, szívügye a tehetséggondozás, a matematika iránti érdeklődés felkeltése.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül:
Paulics Istvánné

Paulics Istvánné 1949-ben született Tokajban. Itt járt általános iskolába, majd a Tokaji Ferenc Gimnáziumban érettségizett. Az egri Tanárképző Főiskolán töltött évek alatt már bemutató órákat tartott, s munkát vállalt a gyermekvárosban. A főiskola elvégzése után 1972-ben Káptalanfán kezdett tanítani, s közben a matematika, műszaki ismeretek szakok mellé harmadikként a fizikát is elvégezte. 1973-tól az ajkai 2. számú és a 4. számú általános iskolákban is tanított, majd az utóbbiban 1975-től igazgatóhelyettes lett.

A kezdetektől fogva sok energiát fordított tanítványai versenyeztetésére, melyet több megyei első helyezés tanúsít. Ugyanilyen odaadással végezte, s végzi ma is a hátrányos helyzetű gyerekek felzárkóztatását. Kis Matematikusok Baráti Köre szakkört szervezett iskolájában, s 1989-ben beindították a matematika tagozatos szintű oktatását. Azóta tanítványai mindig ott vannak a különböző matematika versenyek döntőiben. Munkaközösség vezetőként szakmai kapcsolatokat ápol a város középiskoláival. Rendszeresen továbbképzi magát. Többoldalúságát mutatja, hogy több mint 10 éve tagja a városi pedagógus női kórusnak. Munkáját Kiváló Munkáért állami kitüntetéssel ismerték el. Ma is, már több mint 30 esztendeje az ajkai Fekete István Általános Iskolában tanít.

A Beke Manó-díj második fokozatában részesül:
Számadó László

Számadó László 1986-ban végzett a szegedi JATE matematika-fizika szakán, majd a buda-

pesti Veres Péter nyolc évfolyamos gimnáziumban kezdett tanítani. Az akkor újonnan induló iskola matematika munkaközösségének megszervezését is rábízták. Jelentős szerepe van abban, hogy a Veres Péter Gimnázium a matematikai tehetséggondozás egyik országosan is elismert intézménye lett, tanítványaik rendszeresen jelen vannak a matematika versenyek legjobbjai között.

2002 szeptemberétől a budapesti Árpád Gimnázium tanára, ahol hat évfolyamos speciális matematika tagozatos csoportot kezdett tanítani.

Megnyerő tanár-egyéniségére, szakmai és módszertani felkészültségére hamar felfigyeltek kollegái és vezetői. 1990-től nyolc éven át az ELTE Tanárképző Főiskolai Karának vezető tanáraként foglalkozott matematika szakos tanárjelöltekkel.

Szakórái, matematika szakköri foglalkozásai és az általa szervezett kirándulások egyaránt igen népszerűek a diákok körében.

Ötletes, jó feladat-kitűzó. Évek óta olvashatjuk a KöMaL-ban felvételi mérőlapjait.

A tehetséggondozás országos munkájában az Abacus és a KÖMaL szerkesztőbizottsági tagjaként vesz részt 1998 ill. 2000 óta.

Szegeden Hajnal Imre tanár úr kedves tanítványa volt, így került sor arra, hogy a Hajnal család megkeresésére feleségével, Számadóné Békésy Szilviával elvállalták a Hajnal-féle középiskolai tankönyvsorozat átdolgozását. A jól sikerült munka eredményét már részben ismerhetjük, a további kötetek munkálatai folyamatban vannak.

1999 szeptembere óta a Fővárosi Pedagógiai Intézet matematika szaktanácsadója középiskolai területen.

Sok meghívást kap továbbképzések, előadások tartására Budapesten és vidéken egyaránt, különösen sikeresek voltak a statisztika tanításával, vagy a tehetséggondozással kapcsolatos előadásai.

A Rátz László Vándorgyűlésen is többször élvezhettük programjait. 1999-ben Ericsson-díj kitüntetést kapott a matematika népszerűsítéséért.

A Beke Manó-díj második fokozatát kapja:
Varga József

Varga József 1955-ben született Mosonmagyaróváron. Egyetemi tanulmányait a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika-fizika szakán fejezte be 1980-ban. 1985-ben ugyanott elvégezte a technika szakot, majd 2001-ben a Szegedi Tudományegyetemen pedagógiai értékelési szakértő képesítést nyert.

A kecskeméti Bolyai János Gimnázium alapító tanára 1987 óta. Munkaközösség-vezető, a Bolyai János Matematikai Társulat Bács-Kiskun Megyei Tagozatának titkára, a METESZ operatív bizottságának tagja, a Kecskemét és környéke iskolatársulás matematikai munkaközösségének vezetője. Részt vesz a Zrínyi Ilona matematika verseny előkészítésében, városi szintű tehetséggondozó szakkört vezet. Megszállott híve a tehetségek felkutatásának és minél teljesebb kibontakoztatásának. Több tanítványa ért el OKTV-an 1–10; helyezést, és rendszeresen szerepelnek tanítványai az Arany Dániel, a Kenguru, ill. a Gordiusz versenyek élmezőnyében is. Szakmailag folyamatosan képezi magát, tanítványai szinte kivétel nélkül felvételt nyernek a különböző felsőoktatási intézményekbe.

Munkáját több díjjal is elismerték: elsőként kapta meg a Kecskemét város által alapított Bolyai díjat 1994-ben. 1997-ben Kecskemét városért Oktatási Díjat, majd 1999-ben a Graphisoft Alapítvány a Matematika Oktatásáért Díjat kapta.

Varga József személyisége, munkássága példaértékű és meghatározó a Bolyai János Gimnázium nevelőtestületében.

Urbán János

A XXXII. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület immár hagyományosan Vácott rendezte meg 2003. június 23–25-ig a Kalmár László Matematikaverseny országos döntőjét az 5–8. osztályos tanulók számára. A kétfordulós, kétnapos versenyen az ország minden részéből összesen 97 tanuló vett részt.

A négy évfolyamban a legjobb helyezéseket a következő tanulók érték el:

5. osztály

I. Dinh Van Anh, Budapest, ELTE Radnóti Gimmnázium (tanára Morvai Éva)

II. Kovács Gergely, Nyíregyháza, Görögkatolikus Általános Iskola (tanára Bodnár Bernadett)

III. Bodor Bertalan, Pécs, Pázmány Péter utcai Általános Iskola (tanára Szabó Jánosné és Czigler Jánosné)

6. osztály

I. Grósz Dániel, Budapest, Kós Károly Általános Iskola (tanára Borbély Judit)

II. Nagy-Baló András, Budapest, Baár-Madas Református Általános Iskola (tanára Nagy-Baló András)

III. Englert Péter, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium (tanára Csiszár Mária)

7. osztály

I. Kecskeméti Szabolcs, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium (tanára Fazakas Tünde)

II. Korándi Dániel, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium

III. Tóth László Márton, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium (tanárai Remeténé Orvos Viola, Lakatos Tibor és Pósa Lajos)

8. osztály

I. Nagy Csaba, Budapest, ELTE Radnóti Gimnázium

II. Gyenizse Gergő, Kiskunhalas, Szilády Áron Gimnázium

III. Kunovszki Péter, Mohács, Kisfaludy Gimnázium (tanárai Kunovszki István és Pósa Lajos)

A verseny döntőjének két napján a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

Ötödik osztály

1. nap

1. Melyik lehet az a háromjegyű tízes számrendszerbeli szám, amelyhez akár hozzáadjuk, akár kivonjuk belőle a számjegyei összegét, csupa egyenlő számjegyekből álló számot kapunk?

2. Egy négyzetes oszlopot befestünk pirosra, ezután feldaraboljuk egyforma (egybevágó) kis kockákra. Ezek közül 28 darab olyan kis kockát kapunk, amelynek pontosan 2 szomszédos oldallapja festett. Összesen hány kis kockára daraboltuk fel a négyzetes oszlopot?

3. Melyik az a pozitív egész szám, amelyből 11-et elvéve és a maradékot 11-gyel szorozva ugyanannyit kapunk, mint ha a számból 13-at veszünk el, és a maradékot 13-mal szorozzuk?

4. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány páros szám készíthető, ha mindegyik számjegyet legfeljebb egyszer használhatjuk fel?

Hatodik osztály

1. nap

1. Két pozitív egész szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát összeadtuk, eredményül 36-ot kaptunk. Melyik lehet ez a két szám?

2. Az *ABCD* téglalap *AD* és *BC* oldalaira mint átmérőkre ugyanabban az irányban egy-egy félkört rajzoltunk. A téglalap oldalainak hossza $AD = BC = 4$, és $AB = CD = 2$ egység. Számítsuk ki az *AB* szakasz, *BC* félkör, *CD* szakasz és *DA* félkör által határolt „négyszög" területét!

3. Egy négyzetes oszlopot pirosra festettünk, azután feldaraboltuk egybevágó kis kockákra. Ezek közül 48 olyan kis kockát találtunk, amelyeknek csak egyik lapja festett. Hány kis kockánk lett összesen?

4. Melyik lehet az a háromjegyű pozitív egész szám, amelynek 7-szerese egy egész szám harmadik hatványa?

Hetedik osztály

1. nap

1. Hányféleképpen bonthatjuk fel a 12-t három pozitív egész szám összegére, ha a felbontás sorrendje is számít (például $3 + 3 + 6$ más felbontás, mint $3 + 6 + 3$)?

2. Az *ABCD* paralelogramma *A* és *D* csúcsból induló (belső)szögfelezői a *P* pontban metszik egymást. A *BC* oldal felezi az *AP* szakaszt. A paralelogramma kerülete 60 egység. Számítsuk ki a paralelogramma oldalait!

3. Van-e olyan tízes számrendszerbeli ötjegyű négyzetszám, amelynek minden számjegye páros, és különböző számjegyekből áll?

4. Az *ABCD* trapéz átlóinak metszéspontja *O*. A trapéz két párhuzamos oldala *AD* és *BC*. Az *ADO* háromszög területe 16, a *BCO* háromszög területe 4 területegység. Számítsuk ki a trapéz területét!

5. Igazoljuk, hogy ha *p* és *q* két szomszédos páratlan prímszám, és $p + q = 2r$, akkor r összetett szám! (Két prímszám szomszédos, ha nincs köztük más prímszám.)

Nyolcadik osztály

1. nap

1. Néhány (legalább 2) egymást követő páratlan szám összege lehet-e prímszám?

2. Igazoljuk, hogy minden olyan derékszögű háromszögben, amelyben az oldalak hosszának mérőszáma egész, valamelyik befogó hosszának mérőszáma osztható 3-mal!

3. Egy kör kerületén az *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J* pontok egy szabályos tízszög egymást követő csúcsai. Igazoljuk, hogy az *AD* és *AB* szakaszok különbsége egyenlő a kör sugarával!

4. Mutassuk meg, hogy ha *p, q* és *r* pozitív számok, akkor

$$\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)}{pqr} \geq 27.$$

5. Egy tetraéder bármelyik csúcsában 3 háromszöglap találkozik. Nyilvánvaló, hogy bármely tetraéder csúcsban az itt találkozó 3 szög közül bármely kettő összege nagyobb, mint a harmadik szög. Mutassuk meg, hogy bármely tetraédernek van olyan csúcsa, ahol a találkozó 3 szög mindegyike hegyesszög!

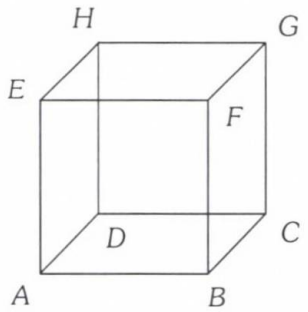
Ötödik osztály

2. nap

1. Melyik az a pozitív szám, amelynek egyhetedét megszorozva az egytizenegyedével, magát a számot kapjuk?

2. Három szomszédos páros szám szorzata ötjegyű. A szorzat egyeseinek helyén 8, a tízezreseinek helyén 1 áll. Mi lehet a három szám?

3. Rajzold meg a kocka felszínén (felületén) az *A*-ból *G*-be vezető legrövidebb utat. Indokold is meg, hogy miért ez a legrövidebb!



4. Egy bizonyos időszakról a meteorológiai intézet a következő összefoglaló jelentést adta. Ha reggel esett az eső, akkor este derült volt az ég, ha este esett az eső, akkor reggel volt derült idő. Összesen 9 esős nap volt, és 6 nap fordult elő derült este, 7 nap volt derült reggel. Hány napról szólt a meteorológiai intézet jelentése?

Hatodik osztály

2. nap

1. Melyik az a pozitív egész szám, amely 350-nél a számjegyei összegével kisebb?

2. Egy autóbusz az *A* városból *B* városba megy. Amikor az úton a 150-es kilométeroszlophoz értek, a sofőr megjegyezte, hogy még háromszor annyit kell megtenni, mint amennyit eddig jöttek. Bizonyos idő múlva, a 106-os kilométeroszlopnál a sofőr azt mondta, most már csak harmadannyit kell menni, mint amennyit eddig jöttek. Milyen messze van az *A* város a *B*-től?

3. Adjunk meg a síkon 8 pontot úgy, hogy az adott pontok közül bármely két pontot egymással összekötve összesen 17 egyenest kapjunk!

4. Előfordulhat-e olyan év, amelyben semelyik hónap első napja sem esik hétfőre? Válaszodat indokold meg!

Hetedik osztály

2. nap

1. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyekhez hozzáadva a számjegyek megfordításával kapott kétjegyű számot, négyzetszámot kapunk?

2. Az *ABC* háromszög *C* csúcsnál lévő szöge 120°-os. A háromszög (belső) szögfelezői *AP*, *BQ*, és *CR*. Számítsuk ki a *PRQ* szöget!

3. Igazoljuk, hogy ha két egész szám négyzetének összege osztható 7-tel, akkor osztható 49-cel is!

4. Adott két párhuzamos egyenes, *a* és *b*. Az *a* egyenesen kijelölünk 10 pontot, a *b*-n 5 pontot. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a kijelölt pontok közül valók?

Nyolcadik osztály

2. nap

1. Öt egymást követő pozitív egész szám szorzata 120-szorosa az *ababab* alakú tízes számrendszerbeli számnak. Melyik lehet ez az öt szám?

2. Az *ABC* hegyesszögű háromszög oldalfelező pontjaiból merőlegeseket állítunk a szomszédos oldalakra. Ezeknek a merőlegeseknek a háromszögön belüli metszéspontjai és a háromszög oldalfelező pontjai egy hatszöget határoznak meg. Hányad része a hatszög területe a háromszög területének?

3. Hányféleképpen lehet kiválasztani a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek közül hármat úgy, hogy ne legyenek köztük szomszédosak?

4. Az *ABC* hegyesszögű háromszögben meghúztuk az *A* és *B* csúcsból induló magasságvonalakat. Igazoljuk, hogy a magasságvonalak talppontjait összekötő szakasz felező merőlegese felezi a háromszög *AB* oldalát!

Polcz Katalin – Poronyi Gábor

Beszámoló a 2003. évi Gordiusz Matematika Tesztversenyről

Pécsi matematikatanárok 1996-ban feleletválasztós tesztversenyt rendeztek középiskolásoknak Baranya megyében. A kedvező fogadtatáson felbuzdulva a következő évtől kezdve már a kétfordulós (megyei/körzeti verseny, majd országos döntő Pécsett) Gordiusz Matematika Tesztversenyt hirdették meg és bonyolították le. A diákok hamar megszerették ezt a versenyt, így évről évre nőtt a helyszínek és versenyzők száma. 2003-ban az ország tizenkilenc megyéjéből, Budapest négy körzetéből, Erdélyből, Felvidékről, Kárpátaljáról és Vajdaságból 12 060 diák nevezett a Gordiuszra.

Az első fordulóban és a döntőben is 90 perc alatt 30 (évfolyamonként különböző) feladatot kellett megoldani és öt válaszból az egyetlen helyeset kiválasztani. A feladatsorokat pécsi középiskolai tanárok: *Bereczkiné Székely Erzsébet* (9. évf.), *Sáráné Dombi Anna* (10. évf.), *Poronyi Gábor* (11. évf.) és *Polcz Katalin* (12. évf.) állították össze.

Az első forduló február 26-án volt. Ennek eredményei alapján 89 iskola 200 diákja kapott meghívást az április 5-én Pécsett megrendezett döntőre. A Leőwey Klára Gimnáziumban volt a megnyitó és a verseny. A versenyt közös feladatmegoldás követte, majd a versenyzők és kísérőik részére városnézés, mecseki séta, az IH-Eurodance együttes Táncőrület című műsora egészítette ki a programot.

A válaszok számítógépes kiértékelése után másnap, április 6-án a Pécsi Művészeti Szakközépiskola hangversenytermében volt az ünnepélyes eredményhirdetés, melyen Sipos János, az Oktatási Minisztérium államtitkára köszöntötte a résztvevőket és a Művészeti Szakközépiskola diákjai adtak műsort. A döntő minden résztvevője oklevelet kapott, évfolyamonként az első tizenkét helyezett jutalmat is.

Eredmények:

9. évfolyam:

1. *Dányi Zsolt,* Kossuth Lajos Gimnázium és Szakközépiskola, Tiszafüred

2. *Jankó Zsuzsanna,* Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged

3. *Nikházy László,* Kazinczy Ferenc Gimnázium, Győr

4. *Csorba János,* Apor Vilmos Katolikus Iskolaközpont, Győr

5. *Németh Zsolt,* Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

6. *Cserép Gergely,* Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest

10. évfolyam:

1. *Czank Tamás,* Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc és *Strenner Balázs,* Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár

3. *Steller Gábor,* ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest

4. *Tassy Gergely,* Veres Péter Gimnázium, Budapest

5. *Petényi Franciska,* Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium, Vác

6. *Szíjártó László,* Garay János gimnázium, Szekszárd

11. évfolyam

1. *Egri Attila,* Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló

2. *Kórus Péter,* Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged

3. *Zsoldos Gábor,* Eötvös József Gimnázium, Tata

4. *Pongrácz András,* Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok

5. *Tolnai Gábor,* Janus Pannonius Gimnázium, Pécs

6. *Lechner Ádám,* Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged

12. évfolyam:

1. *Ruppert László,* Janus Pannonius Gimnázium, Pécs

2. *Csóka Endre,* Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen

3. *Komjáthy Júlia,* Garay János Gimnázium, Szekszárd

4. *Rendes Gábor,* Révai Miklós Gimnázium, Győr

5. *Metzing András,* Leőwey Klára Gimnázium, Pécs

6. *Kormos Attila,* Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen.

Pécs Megyei Jogú Város különdíját kapták *Póla József* főosztályvezetőtől az egyes évfolyamokon legjobban szerepelt határon túli versenyzők: *Kacz Krisztián* (Selye János Magyar Gimnázium, Komárom), *Szathmári Balázs* (Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti), *Gazdag Lehel* (Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy) és *Sipos Kinga* (Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy).

A legjobban szerepelt baranyai versenyző, *Ruppert László* (Janus Pannonius Gimnázium, Pécs) a Baranyai Pedagógiai Szakszolgálatok és Szakmai Szolgáltatások Központjának különdíját vette át *Kucsanda Ibolya* igazgatónőtől.

A szervező bizottság különdíját kapta meg *Poronyi Gábortól* az a tíz tizenkettedikes diák, akik négy alkalommal voltak a döntő résztvevői: *Bóka Gergely* (Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok), *Csóka Endre* (Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen), *Fülöp Anita* (Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár), *Kormos Attila* (Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen), *Kovács István* (Berze Nagy János Gimnázium és Szakközépiskola, Gyöngyös), *Rendes Gábor* (Révai Miklós Gimnázium, Győr), *Ruppert László* (Janus Pannonius Gimnázium, Pécs), *Sipos Kinga* (Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy), *Sparing Dániel* (ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest) és *Tóth Sándor* (Batsányi János Gimnázium és Szakközépiskola, Csongrád).

Sok más információ mellett a teljes eredménylista és a döntőn készült képek is megtalálhatók a verseny honlapján: www.extra.hu/gordiusz-matek.

Az alábbiakban a döntő feladatsoraiból mutatunk meg ízelítőül néhány feladatot.

1. Mennyi a mellékelt elrendezésből kiolvasható összes négyjegyű szám számtani közepében a számjegyek összege, ha csak jobbra és lefele léphetünk?

2003
003
03
3

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 12 (E) 14

2. Bolyai János hagyatékának egyik füzetlapján található egy bűvös négyzet három változóval, de néhány kifejezés elmosódott. Mi állhatott a *-gal jelzett négyzetben? (A bűvös négyzetben minden sorban, minden oszlopban és az átlókban is azonos az összeg.)

x	y	
$4b - 2x - y$		*
$x + y - b$	$2b - y$	

(A) b (B) $2b - x$ (C) $3b - x - y$
(D) $x - 2b$ (E) $2x + y - 2b$

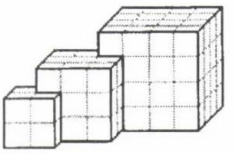
3. A Földön hány fokos szélességi körök fele olyan hosszúak, mint az Egyenlítő? (Az Egyenlítő a 0°-os szélességi kör.)

(A) 30 (B) 45 (C) 60 D) 72 (E) 75

4. Zsófi hétfőtől péntekig minden nap vett a piacon néhány szem almát. Az öt nap alatt összesen 46 darabot, és minden nap többet, mint az előző napon. Pénteken kétszer annyit vett, mint hétfőn. Hány almát vett csütörtökön?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 14

5. Hány cm^2 a felszíne az ábrán látható testnek, ha a legkisebb kocka éle 2 cm, a középsőé 3 cm és a legnagyobbé 4 cm?



(A) 134 (B) 142 (C) 150 (D) 152 (E) 154

6. A háromjegyű *xyz* egész szám 1-gyel kisebb, mint a szélső jegyeinek felcserélésével kapott szám kétszerese. Mennyi $x \cdot y \cdot z$ értéke?

(A) 162 (B) 189 (C) 378 (D) 379 (E) 793

7. Hány megoldása van a $200\{x\} + 3[x] = 2003$ egyenletnek, ahol $\{x\}$ a szám törtrészét, $[x]$ pedig a szám egészrészét jelenti?

(A) 1 (B) 3 (C) 66 (D) 200 (E) 2003

8. Az ábrán 17 darab gyufából kirakott, 2x3 kis négyzetből álló téglalap látható. 1001 gyufából is kis négyzetekből álló téglalapot szeretnénk hasonló módon kirakni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) 3-nál több

9. A tanulók vagy betegek, vagy egészségesek. Tegyük fel, hogy ha egy diák ma egészséges, akkor 0,95 a valószínűsége, hogy holnap is az lesz; ha pedig ma beteg, akkor 0,55 a valószínűsége, hogy holnap is az lesz. Ha egy iskola tanulóinak 20 %-a beteg ma, akkor várhatóan hány % lesz beteg holnap?

(A) 11 (B) 15 (C) 50 (D) 55 (E) 60

10. Egy 32 kártyából álló csomagból egyszerre 3 kártyát húzunk (a lapok húzásának sorrendje nem számít). Hányféleképpen lehet a kártyák értékeinek összege 21, ha mind a négy színből 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11 értékű lap van a csomagban?

(A) 388 (B) 412 (C) 444 (D) 449 (E) 512

(Megoldókulcs: CECCCBCAAB)

Marczis György

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap 2003 – Gyula

„Minden, ami emberi, akár jó, akár rossz, előbb-utóbb véget ér. Kivéve a matematikát."
Erdős Pál

Minden eddiginél több, 119 versenyző részvételével, nagy sikerrel zárult a Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozatának március 22-én Gyulán, az Erkel Ferenc Gimnáziumban rendezett *Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap*-ja. Immár hetedszer gyűltek össze a fürdővárosi gimnáziumban a megye legjobb középiskolás matematikusai és az érdeklődő pedagógusok.

A vendégeket az ünnepélyes megnyitón Babits Mihály Bolyai című versével köszöntötte *Kristóf István*, a rendező iskola tanulója. Ezután *dr. Kereskényi Miklós*, az Erkel Ferenc Gimnázium igazgatója, valamint *Sipos János*, az Oktatási Minisztérium közoktatásért felelős helyettes államtitkára üdvözölte a közel kétszáz megjelentet, majd *Márczis György*, a szervezésért felelős szaktanácsadó köszöntötte a Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozatának elnöki posztjáról leköszönő *dr. Pappné Ádám Györgyit*. Ezután bemutatta a zsűrit, és ismertette a versennyel kapcsolatos tudnivalókat.

Miközben a diákok a 120 percesre tervezett 30 feladatos tesztlapot töltötték ki, addig az érdeklődő vendégek meghallgathatták *Sipos János* államtitkár *„Az oktatáspolitika aktuális kérdései"; dr. Németh József* egyetemi docens *„A végtelen ellentmondásai – érdekes összegek"; dr. Hortobágyi István* egyetemi docens *„Problémamegoldási stratégiák a matematikában"* című előadásait.

Közben a háromfős zsűri (*dr. Németh József, dr. Szakács Attila* és *Kosztolányi József*) az értékelőlapok kijavításához kezdett.

Ezután *Kosztolányi József* egyetemi adjunktus ismertette az általa összeállított feladatlap helyes megoldását.

A programokkal egyidőben a *Konsept-H Kft.*, a *Mozaik Kiadó Kft.*, a *Nemzeti Tankönyvkiadó*, a *Műszaki Könyvkiadó*, a *Polygon Kiadó* és a *Texas Instruments* árusítással egybekötött bemutatót tartott kiadványaiból és termékeiből.

Kora délután már eredményt is hirdettek. *Dr. Németh József*, a zsűri elnöke értékelte a versenyzők munkáját, és kiemelte, hogy a nehéz feladatok ellenére igen magas pontszámot értek el a legjobb tanulók. Ezután átadta a győztesnek és a helyezetteknek, valamint felkészítő tanáraiknak a támogatók által felajánlott értékes jutalmakat. Ebben segített neki *Gyöngyösi András*, aki az Euro-Profil Rt. által felajánlott fődíjat, egy Texas Instruments grafikus számológépet nyújtott át a verseny győztesének. Az egész napos rendezvény a verseny névadója családjának a résztvevőkhöz írt személyes hangú levelének felolvasásával, majd *Marczis György* szaktanácsadó jövő évre szóló meghívó szavaival ért véget.

A verseny végeredménye: 1. *Kelemen Csaba* (Széchenyi István Közgazdasági és Külkereskedelmi Szakközépiskola, tanára *Schédl Ilona*), 2. *Mihók Péter* (Erkel Ferenc Gimnázium, tanára *Tóth István*), 3. *Susánszki Péter* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Dr. Rókáné Rózsa Anikó*), 4. *Sznyida Róbert* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Pocsai Zoltánné*), 5. *Pintér Arnold* (Kner Imre Gimnázium és Szakközépiskola, tanára *Tóthné Szakálos Margit*) 6. *Kindli Erna* (Belvárosi Általános Iskola és Gimnázium, tanára *Kelemenné Kiss Ilona*). A *dr. Perjési Klára*, Gyula város polgármestere által felajánlott „Legjobb eredményt elért gyulai versenyző és tanára" különdíjat *Mihók Péter* és *Tóth István* kapta. A legjobb versenyen kívül induló *Boros Balázs*, a szegedi Ságvári Endre Gyakorló gimnázium diákja lett.

A verseny teljes anyaga megtalálható a www.sulinet.hu és a www.erkel.hu weboldalakon.

Feladatsor

1. $\left(\frac{9}{36}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

(A) $\frac{36}{9}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) 2 (E) –2

2. x és y olyan 0-tól különböző valós számok, amelyekre $x - y = xy$.

Ekkor $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} =$

(A) 1 (B) $\frac{1}{xy}$ (C) $y-x$ (D) 0 (E) –1

3. Az a és b valós számokra

$$\frac{2a+b}{a+b} = \frac{4}{3}. \quad \text{Ekkor } \frac{a}{b} =$$

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) –2 (E) 0

4. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalára kifelé felvesszük az AEB szabályos háromszöget. A CDE háromszög területe

(A) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (C) 1

(D) $1+\frac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $\frac{4-\sqrt{3}}{4}$

5. Egy konvex hatszög átlói legfeljebb hány különböző metszéspontot határozhatnak meg a hatszög belsejében?

(A) 6 (B) 12 (C) 15 (D) 1 (E) 30

6. Melyik hamis az alábbi öt állítás közül?

(A) Ha egy deltoid téglalap, akkor négyzet.
(B) Ha egy négyszögnek van két derékszöge, akkor húrnégyszög.
(C) Van olyan paralelogramma, amelyik érintőnégyszög.
(D) Ha egy paralelogrammának van derékszöge, akkor téglalap.
(E) Van olyan téglalap, amelyik rombusz.

7. Egy n oldalú konvex sokszög valamely $(n-1)$ darab belső szögének összege 2570°. Hány fokos az összegzésből kimaradt szög?

(A) 105° (B) 90° (C) 144° (D) 130° (E) 115°

8. Az A szám négyzetszám (egy egész szám négyzete). Ha B is négyzetszám úgy, hogy $A < B$, valamint A és B között nincs másik négyzetszám, akkor $B =$

(A) A^2+1 (B) $A+1$ (C) $(A+1)^2$
(D) $A+2\sqrt{A}+1$ (E) A^2+A

9. Jelölje $s(n)$ az n pozitív egész szám számjegyeinek összegét.

$s(1)+s(2)+s(3)+\ldots+s(99)+s(100)=$

(A) 900 (B) 901 (C) 450 (D) 1000 (E) 855

10. Egy apa években mért életkora jelenleg háromszorosa két gyermeke években mért életkora összegének. Négy év múlva az apa életkora kétszerese lesz két gyermeke életkora összegének. Hány éves most az apa?

(A) 42 (B) 33 (C) 39 (D) 36
(E) Nem határozható meg egyértelműen.

11. Egy szabályos hatszög beírt körének sugara 2 egység. Hány területegység az oldalfelező pontok által meghatározott szabályos hatszög területe?

(A) $6\sqrt{3}$ (B) 16 (C) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{24}{\sqrt{3}}$
(E) $12\sqrt{3}$

12. Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre

$$\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}=\frac{2002}{2003}?$$

(A) 2002 (B) 2003 (C) 2000 (D) 4005
(E) Nincs ilyen n.

13. Egy számtani sorozatban az első tíz elem összege 100, az első száz elem összege 10. Mennyi az első száztíz elem összege?

(A) –100 (B) 90 (C) 110 (D) –90 (E) –110

14. A $3x^2-7x+1=0$ másodfokú egyenlet gyökei x_1 és x_2. Ekkor $x_1^3x_2+x_1x_2^3=$

(A) $\frac{49}{27}$ (B) $-\frac{16}{9}$ (C) $\frac{\sqrt{37}}{27}$ (D) $\frac{43}{27}$ (E) –21

15. Egy kocka nyolc csúcsa közül négy meghatároz egy szabályos tetraédert. Ha A_t a tetraéder, A_k a kocka felszíne ugyanabban a mértékegységben mérve, akkor $\frac{A_k}{A_t}=$

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{\frac{3}{3}}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2 (E) $\sqrt{3}$

16. Az $y-x\le\sqrt{x^2}$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

(A) az $y\le 0$ és az $y\le 2x$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül;
(B) az $y\ge 0$ és az $y\le 2x$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül;
(C) $y^2\le 2xy$;
(D) $y\le 0$;
(E) az $x\ge 0$ és az $y\le 2x$ egyenlőtlenségek egyidejűleg teljesülnek.

17. Egy matematikai tesztversenyen 30 feladatot tűztek ki, és minden feladatnál öt válaszlehetőség közül kellett megjelölni az egyetlen jó választ. Minden egyes feladat esetén a jó válaszért 5 pont, a rossz válaszért 0 pont járt, és ha valaki nem jelölte meg egyik válaszlehetőséget sem, akkor 1 pontot kapott. Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő a verseny után a jó megoldások ismeretében kiszámolták, hogy hány pontot értek el. A következőket kapták: Aladár: 147, Béla: 144, Csaba: 143, Dani: 141, Ernő: 139. Talán a fáradtságnak is köszönhető, hogy csak az egyik fiú számolt jól. Ki számolta ki helyesen az elért pontszámát?

(A) Aladár (B) Béla (C) Csaba (D) Dani
(E) Ernő

18. A T_1 területű kör egy nagyobb kör belsejében van, amelynek területe T_1+T_2. Mekkora

a kisebb kör sugara, ha a nagyobb kör sugara 3, továbbá T_1, T_2 és $T_1 + T_2$ egy számtani sorozat egymást követő tagjai?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

19. A hegyesszögű ABC háromszög területe

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{4},$$

ahol a, b és c rendre az A, B és C csúcsokkal szemközti oldalak hossza. A C csúcsnál levő belső szög nagysága

(A) 60° (B) 120° (C) 30° (D) 45°

(E) Nem határozható meg egyértelműen.

20. A derékszögű koordináta-rendszerben egy m meredekségű egyenes illeszkedik az $A(m; -9)$ és $B(7; m)$ pontokra. Számítsuk ki m értékét.

(A) 7 (B) –9 (C) 1 (D) $\frac{9}{7}$ (E) 3

21. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza c, beírt köre sugarának hossza pedig r. Hányszorosa a háromszög területe a kör területének?

(A) $\frac{\pi r}{2c+r}$ (B) $\frac{\pi r}{c+2r}$ (C) $\frac{c^2+r^2}{\pi r^2}$

(D) $\frac{\pi r}{c+r}$ (E) Az előzőek egyike sem

22. A $3^{2x+1} - 3^{x+2} - 3^{x-1} + 1 = 0$ egyenlet valós megoldásainak száma

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

23. $f(a)$ jelölje minden a valós szám esetén a $4a + 1$, $a + 2$ és $-2a + 4$ számok minimumát. Mennyi $f(a)$ maximuma?

(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

24. Egy pozitív egész számot csökkenőnek nevezünk, ha minden egyes számjegye kisebb az őt megelőző számjegynél. (Például 5321 csökkenő szám.) Hány négyjegyű csökkenő szám van?

(A) 200 (B) 250 (C) 210 (D) 225 (E) 180

25. Az egységnyi oldalú $ABCD$ szabályos tetraéder AB élén mozog a P, CD élén mozog a Q pont. Mekkora az összes lehetséges PQ távolságok minimuma?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

26. Mennyi a minimuma azon derékszögű háromszögek kerületének, amelyeknek mindhárom oldala 7-tel osztható pozitív egész szám?

(A) 210 (B) 84 (C) 49 (D) 135 (E) 168

27. Az $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + ax + b$ függvényről tudjuk, hogy pontosan egy olyan x_0 valós szám létezik, amelyre $f(x_0) = x_0$. Ekkor $b =$

(A) 2 (B) x_0 (C) $\frac{a-1}{2}$ (D) $\frac{a+1}{2}$

(E) $\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$

28. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ és $a_n = a_{n-3} + a_{n-4}$, ha $n > 4$. Tekintsük a sorozatnak azon tagjait, amelyek páros számok, legyen ezek sorozata $\{b_n\}$. Ha $b_{2003} = a_k$, akkor $k =$

(A) 4295 (B) 4290 (C) 4291 (D) 4305

(E) 4300

29. Az f függvény minden valós x és y esetén kielégíti az $f(x) + f(y) = f(x + y) - xy - 1$ függvényegyenletet. Ha $f(1) = 1$, akkor hány olyan 1-től különböző n egész szám van, amelyre $f(n) = n$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(E) Végtelen sok

30. Egy táblára felírtuk 1-től n-ig a pozitív egész számokat, majd letöröltük az egyiket. A táblán maradt számok átlaga (számtani közepe) $\frac{581}{15}$. Melyik számot töröltük le?

(A) 3 (B) 15 (C) 21 (D) 76

(E) Nincs megoldás

A feladatsor helyes megoldása:

1D, 2E, 3C, 4A, 5C, 6B, 7D, 8D, 9B, 10D, 11A, 12A, 13E, 14D, 15E, 16A, 17D, 18B, 19D, 20E, 21E, 22C, 23A, 24C, 25C, 26B, 27E, 28A, 29B, 30C.

A feladatsort összeállította: Kosztolányi József adjunktus, Szegedi Tudományegyetem.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2003. november 30.

230. Az ABC szabályos háromszög AB és AC oldalának felezőpontja rendre P és Q. A háromszög köréírt körének a PQ egyenessel vett egyik metszéspontja R. Számítsuk ki a $\frac{PQ}{QR}$ hányadost!

231. Mutassuk meg, hogy bármely 3-nál nem kisebb páratlan egész szám esetén az

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\cdot(n-1)!$$

szorzat osztható n-nel!

232. A pozitív tagokból álló $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatra bármely pozitív egész n esetén teljesül, hogy

$$a_{2n}+a_{2n+1}\geq a_n.$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens!

233. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1=1$, $a_2=2$ és bármely 2-nél nem kisebb n esetén

$$a_{n+1}=1+a_1a_2\ldots a_{n-1}+(a_1a_2\ldots a_{n-1})^2.$$

Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

határértéket!

234. Legyen

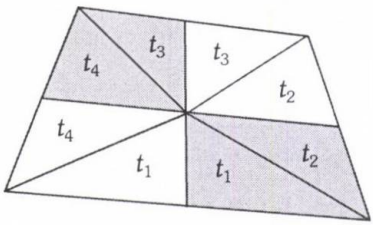
$$S_n=\sum_{k=1}^{2n-1}2^{k-1}\cdot\binom{4n-2}{2k}.$$

Igazoljuk, hogy S_n bármely pozitív egész n esetén négyzetszám!

Feladatmegoldások (215-219. feladatok)

215. Egy konvex négyszöget négy négyszögre bontunk a középvonalak behúzásával. Tudjuk, hogy a keletkezett négy négyszög mindegyikére teljesül, hogy a területük mértékszáma pozitív egész szám. Lehet-e az eredeti négyszög területe 2003 területegység?

Megoldás: Az *1. ábrán* bevonalkázott két négyszög területének összege az eredeti négyszög területének fele, ugyanis az eredeti négyszög oldalaira illeszkedő háromszögek területe megegyezik.



1. ábra

Ebből a tényből és a feladat feltételéből adódik, hogy az eredeti négyszög területe páros szám, így nem lehet 2003.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

216. Egy 8x8-as sakktábla négyzeteibe a bal felső sarokból indulva soronként balról jobbra

és felülről lefelé haladva beírtuk a pozitív egész számokat 1-től 64-ig. Ezután a tábla mezőit minden lehetséges módon letakartuk egy 2x2-es négyzettel. Hány esetben lesz a letakart négyzetekben levő számok összege 3-mal osztható?

Megoldás: Egy 2x2-es négyzetet annyiféleképpen helyezhetünk el egy 8x8-as sakktáblán, ahányféleképpen a 2x2-es négyzet bal felső mezőjét ki tudjuk választani a jobb oldali oszlop és az alsó sor elhagyásával kapott 7x7-es táblából. Ha a 2x2-es négyzetet úgy helyeztük el, hogy a bal felső mezője a k számot takarja le, akkor a letakart mezők k, $k + 1$, $k + 8$, $k + 9$, az összeg pedig $4k + 18$. Ez pontosan akkor osztható 3-mal, ha k osztható 3-mal. Mivel $k \leq 55$, és k nem lehet 8-cal osztható, ezért az összegre tett feltételnek 16 mező felel meg.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: A fentihez hasonló gondolatmenettel adódik, hogy n x n-es tábla esetén a lehetséges 2x2-es lefedésekben a 3-mal osztható összegek száma

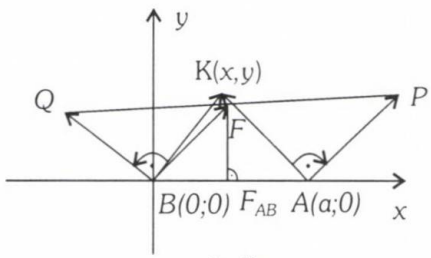
$-3k^2 - 2k$, ha $n = 3k$ $(k \geq 1)$;
$-3k^2$, ha $n = 3k + 1$ $(k \geq 1)$;
$-3k^2 + 2k$, ha $n = 3k + 2$ $(k \geq 1)$.

Zachar Zoltán, Tatabánya

A megoldók száma: 12.

217. Két rabló elhatározta, hogy elássa a rabolt kincset egy folyótól nem messze. Kijelöltek egy A akácfát, és tőle nyugatra egy B bükkfát. Ezután a folyópart ugyanazon oldalán leszúrtak egy K karót a két fától nem túl messze. K-tól az egyik rabló elindult egyenesen B felé, ott jobbra fordult 90°-kal, majd ugyanakkora távolságra ment el a B-től a Q pontba, mint amennyire a karó volt. Ugyanezt tette a másik rabló is, de ő a $KA = AP$ utat tette meg úgy, hogy A-ban 90°-kal balra fordult. Majd egymás felé mentek a PQ egyenesen, s pontosan a PQ távolság felében elásták a kincset. Néhány hónap múlva visszamentek, de nagy megdöbbenéssel tapasztalták, hogy a karó nincs a helyén. Megtalálhatják-e a kincset?

I. megoldás: Vegyünk fel egy koordináta-rendszert úgy, hogy B legyen az origó, A essen az x tengelyre $(A(a; 0))$, a korábban leszúrt K karó helyzetét pedig jelölje a $K(x; y)$ pont *(2. ábra)*. (Az új helyzetben ez a rablók számára ismeretlen.)



2. ábra

Legyen $\vec{p}$ a P pont, $\vec{q}$ a Q pont, $\vec{k}$ pedig a K pont helyvektora. A kincs elhelyezésének feltételeiből adódik, hogy $\vec{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\vec{q} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, $\vec{p} = (a + y)\mathbf{i} + (a - x)\mathbf{j}$, így a PQ szakasz F felezőpontjának $\vec{f}$ helyvektorára (az elásott kincs helyére) nézve

$$\vec{f} = \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} = \frac{a}{2}\mathbf{i} + \frac{a}{2}\mathbf{j}.$$

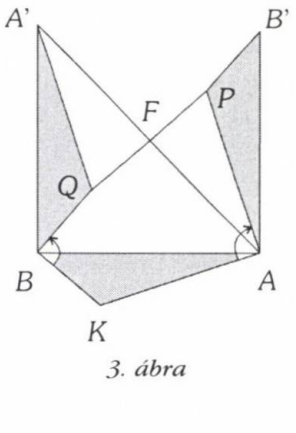
A kincs tehát az AB szakasz felező merőlegesén, AB felezőpontjától északra

$$\frac{AB}{2}$$

távolságban van. A kincs helyzete független a karó helyzetétől, így a rablók megtalálhatják a kincset.

Kamarás Lajos, Pécs
Zachar Zoltán, Tatabánya

II. megoldás: Legyen A' az A pont B körüli $+90°$-os elforgatottja, B' a B pont A körüli $-90°$-os elforgatottja *(3. ábra)*.



3. ábra

Belátjuk, hogy a PQ szakasz F felezőpontja az $AB'A'B$ négyzet átlóinak metszéspontja.

Az ABK háromszög $+90°$-os B körüli elforgatottja az $A'BQ$ háromszög, míg ugyanezen háromszög $-90°$-os A körüli elforgatottja az APB' háromszög. Az elforgatásokkal kapott két háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, így az $A'QAP$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma átlói felezik egymást, így F felezi az AA' szakaszt. Ebből pedig következik, hogy az AFB háromszög pozitív irányítású egyenlő szárú derékszögű háromszög, a derékszögű csúcs F.

Kiss Zoltán (Pécs) és Szoldatics József (Kapuvár) megoldása alapján

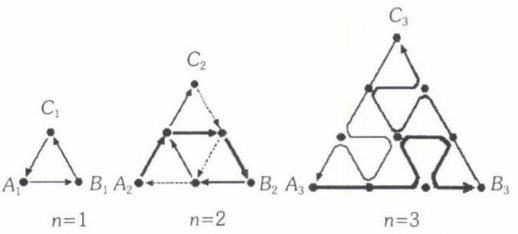
Megjegyzés: A feladat és megoldása megtalálható a *Matematikai Lapok, Kolozsvár* 1990/8-9. számában, Tuzson Zoltán Rablómesék című cikkében.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 10.

218. Egy szabályos háromszög oldalának hossza n egység. Felbontjuk ezt a háromszöget egységnyi oldalú szabályos háromszögekre. Az így kapott ábrán kezdetben minden vonal kék színű. Az eredeti háromszög csúcsaiból indul három festő, A, B és C, akik felváltva ($ABCABC...$ sorrendben) egy-egy 1 hosszúságú szakaszon végigfutnak, és közben azt a szakaszt pirosra festik. Csomópontokban találkozhatnak, de csak kék vonalon indulhatnak tovább. Kiszínezhető-e az összes vonal pirosra?

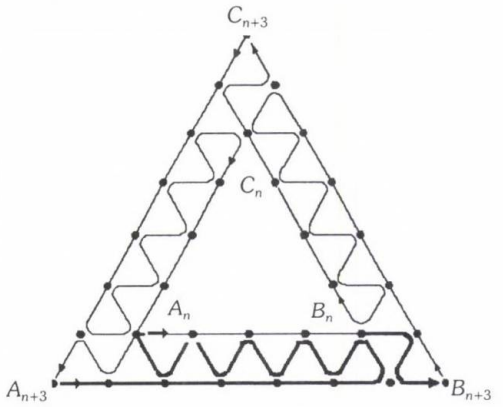
Megoldás: Tetszőleges pozitív egész n esetén kiszínezhető az összes vonal pirosra. Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely pozitív egész n esetén az $A_nB_nC_n$ háromszögből kapott élhálózat a feladatban megfogalmazott módon kiszínezhető úgy, hogy mindegyik festő az óramutató járásával ellentétes körüljárási irány szerint – kezdőpontjához képest – a következő csúcsban fejezi be a festést. $n = 1, 2, 3$ esetén a *4. ábrán* látható módon kiszínezhető a megfelelő háromszög.



4. ábra

Tegyük fel, hogy az $A_nB_nC_n$ ($n \geq 3$) háromszög kiszínezhető, és a festők a pozitív körüljárási iránynak megfelelően a következő csúcsban fejezik be a festést. Belátjuk, hogy ekkor az $A_{n+3}B_{n+3}C_{n+3}$ háromszög is kiszínezhető.

Az A festő induljon el az A_{n+3} csúcsból, és az *5. ábra* szerint haladva fesse át az éleket. Mikor az A_n csúcsba ér, akkor kezdje meg az $A_nB_nC_n$ háromszög ráeső részének festését. Indukciós feltevésünk szerint az $A_nB_nC_n$ háromszög festését a B_n csúcsban fejezi be, így az *5. ábra* szerint haladva megfelelően be tudja fejezni az $A_{n+3}B_{n+3}C_{n+3}$ háromszög ráeső részének festését is.



5. ábra

A másik két festő a körüljárási iránynak megfelelően ugyanezt a taktikát kövesse. Ezzel ki tudják festeni megfelelően a háromszöget.

Rakonczai György, Budapest

Megjegyzés: Mindegyik megoldó teljes indukcióval bizonyított, viszont a festési algoritmusok között jelentős különbségek voltak.

A megoldók száma: 7.

219. Egy méterrúdra (1 m hosszú) felteszünk 12 hangyát. A hangyák elindulnak valamilyen irányba a rúdon, és ha két hangya találkozik, akkor megfordulnak, és változatlan – 1 m/perc – sebességgel folytatják útjukat. Ha a rúd végére érnek, akkor leesnek. Hogyan tegyük fel a hangyákat a rúdra, ha azt akarjuk, hogy a lehető leghosszabb ideig legyen (legalább egy) hangya a rúdon? (A hangyák kezdő helyzetből történő elindulási irányait mi szabhatjuk meg.)

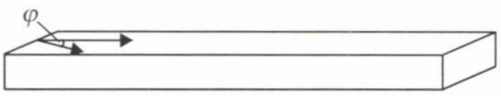
Megoldás: Tegyük fel, hogy a rúd szélessége elhanyagolható, és a hangyákat egyszerre tesszük fel a rúdra. A hangyák mozgását kívülről figyelő számára nem jelent változást, ha úgy módosítjuk a szabályt, hogy találkozáskor a hangyák nem fordulnak vissza, hanem folytatják tovább az útjukat. A hangyák sebességét figyelembe véve könnyen látható, hogy a rúd egyik végére helyezve őket a felrakástól mérve legfeljebb 1 percig tartózkodhatnak hangyák a rúdon.

Ha nem kell egyszerre feltenni a hangyákat a rúdra (a feladat szövegében explicit utalás erre nincs), akkor „váltó futás" jelleggel az első hangya felrakásától számolva legfeljebb 12 percig tartózkodhat hangya a rúdon.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy a rúd szélessége és vastagsága nem elhanyagolható, és keresztmetszete a hossztól függetlenül állandó. Legyen a rúd hosszára merőleges keresztmetszet kerülete k. Tegyük fel továbbá, hogy a hangyák „fejjel lefelé" sem esnek le a rúdról, pontosabban (a feladat szövege alapján) csak a rúd végén eshetnek le.

Indítsunk el egy hangyát a rúd egyik végéről a rúd hossztengelyével φ szöget bezáró irányban *(6. ábra)*.



6. ábra

A hangya egy „körbemenetellel" $k \operatorname{ctg}\varphi$ távolságot tesz meg előre, útja pedig Pitagorasz tételének felhasználásával

$$\sqrt{k^2 + (k \operatorname{ctg}\varphi)^2} = k\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}.$$

Eme „csavarvonal" mentén a hangyának

$$\frac{1\text{m}}{k \operatorname{ctg}\varphi}$$

„körbemenetet" kell megtennie. A rúd túlsó végéig megtett útja így

$$s = \frac{1\text{m}}{k \operatorname{ctg}\varphi} \cdot k\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} \ \text{(m)}.$$

A sebesség egységnyi, így a leeséshez szükséges idő

$$t = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} \ \text{(perc)}.$$

Itt ha φ tart 90°-hoz, akkor a szükséges idő tart a végtelenhez. Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen nagy időt be lehet állítani. Ha egy hangyát elindítunk így, akkor a többi 11 hangyát indítsuk a másik végéről „egyenesen a leesésbe". (A hangya fizikai paraméterei miatt valószínűleg φ nem közelítheti meg tetszőlegesen a 90°-ot.)

Szoldatics József, Kapuvár

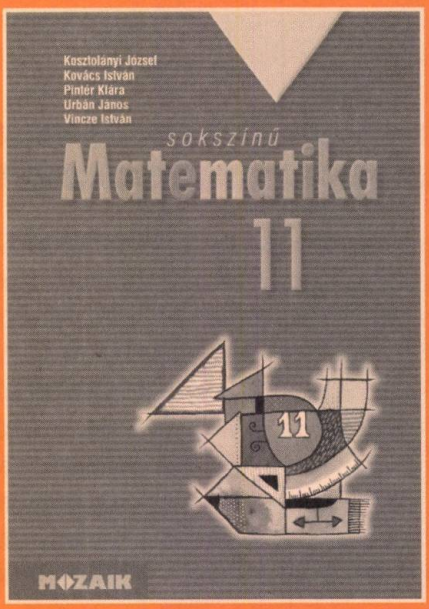
A megoldók száma: 9.

A megoldók névsora: Dályay Pál Péter, Szeged (215-219.); Fitos László, Esztergom (216.); Kamarás Lajos, Pécs (215-219.); Kiss Zoltán, Pécs (215-219.); László Sándor, Szombathely (215., 216.); Nagy Béla, Sarkad (215-217., 219.); Rakonczai György, Budapest (215-219.); Schuler László, Budapest (216., 217.); Szoldatics József, Kapuvár (215., 216., 217. 4 mód, 218., 219. 2 mód); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (215-217., 219.); Varga Éva, Kecskemét (215.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (215-219.); Zachar Zoltán, Tatabánya (215-219.).

SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD

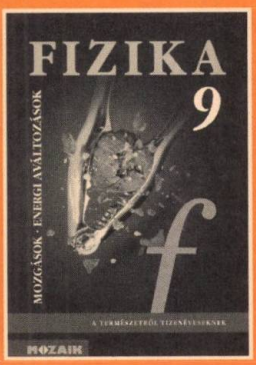
EGYEDÜLÁLLÓ SIKER A TANKÖNYVEK KÖZÖTT

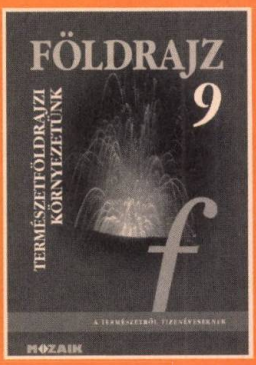
Az elmúlt évben három rangos díjat is elnyert az új 9. évfolyamos matematika tankönyv: a *Nemzetközi Könyvfesztivál* Budai-díját, a *Szép Magyar Könyv 2001* Verseny díját és különdíját. Megjelent a közkedvelt tankönyvsorozat 11. osztályos kötete. A tankönyvek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

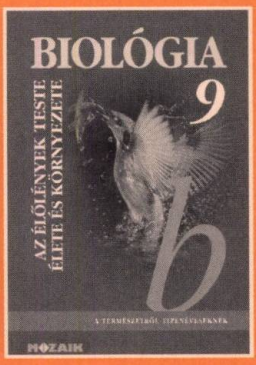


A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

A SZÉP MAGYAR KÖNYV 2001 VERSENY DÍJNYERTES KÖTETEI







MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

ISKOLAI KÖNYVTÁR

Gondolkozzunk „görögül”!

(Ringler András)

Nélkülözhető-e a párhuzamos szelők tétele?

(Peller József)

Egy geometriai egyenlőtlenségről

(Csete Lajos)

A Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

(Dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde)

XI. ÉVFOLYAM 2003 5

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1200 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltban: Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Gondolkozzunk „görögül"!
Ringler András egyetemi docens, Szeged

Nélkülözhető-e a párhuzamos szelők tétele?
Peller József egyetemi docens, Budapest

Egy geometriai egyenlőtlenségről
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Hírek versenyekről

A Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről
Dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde adjunktus, Debrecen

Beszámoló a XII. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről
Urbán János tanár, Budapest

A tanárképző főiskolák 2003. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Ringler András

Gondolkozzunk „görögül"!

Másodfokú egyenletek geometriai megoldása

A matematika fejlődésének nyomon követése, az emberi gondolkodás történetének bemutatása nagyon fontos és érdekes feladat. Tudománytörténeti kérdések felvetésével számos érdekes és hasznos ismeretet adhatunk át tanítványainknak; a régi dolgok újragondolása – a harmóniák felismerése – számos intellektuális öröm forrása. Pl. a görögök ezeréves matematikája mindenkit elbűvöl, én nem győzök eleget csodálkozni azon, hogy Euklidész korában körzővel és vonalzóval oldották meg a másodfokú egyenleteket. Ezen persze nem kellene csodálkozni, hiszen a „görögök idejében" a matematikában jelentkező, gyakran válságot okozó problémákat egyszerűen „áttolták" a geometria körébe: nem csoda hát, hogy 2000 évvel ezelőtt a geometria volt a „fő-tudomány". Ezt a gondolatot tükrözi a platóni Akadémia kapuján lévő felirat is: „Ne lépjen be ide az, aki nem ismeri a geometriát".

Az $a \cdot x - x^2 = b^2$, az $a \cdot x + x^2 = b^2$, az $a \cdot x = b^2$ és az $a \cdot b = x^2$ alakú egyenletek körzővel és vonalzóval történő megoldása roppant tanulságos (lásd [1]-et és [2]-őt). Az *e* kifejezésekben lévő *a* és *b* betűk előre megadott számok, az akkori szóhasználattal: mennyiségek, általában szakaszok. Az ilyen alakú kifejezéseket a görögök elliptikus συμπτομα-nak, elliptikus feltételnek, mai szóhasználattal elliptikus egyenletnek nevezték. Ezen furcsa elnevezés hátterében a mindent átható geometriai szemléletük, a kifejezésekben lévő tagok geometriai megjelenítése áll. A görögök gondolkodása szerint ugyanis az $a \cdot x$, az x^2 és a b^2 tagok rendre egy *a* és *x* oldalú téglalap, egy *x* oldalú négyzet, és egy *b* oldalú négyzet területeit képviselik. Az $a \cdot x - x^2 = b^2$ alakú egyenlet megoldásakor keresték az *a* oldalhoz illeszthető téglalapok közül azt, amelynek *x* magasságával számolt $a \cdot x$ területéből elhagyva az *x* oldalú négyzet x^2 területét, maradékként éppen a *b* oldalú négyzet b^2 területe adódik. Igen-igen valószínű, hogy Euklidész ezt valahogy így mondhatta: az $a \cdot x$ területű téglalap területét, x^2 terület-hiánnyal, b^2 területű négyzetté alakítom. Ezt a terület-hiánnyal történő „téglalapillesztést" a görögök elliptikus illesztésnek nevezték.

Az $a \cdot x + x^2 = b^2$ alakú egyenlet megoldásánál a következő problémával állunk szemben: az *a* oldalhoz illeszthető téglalapok közül keressük annak a magasságát, amelynek $a \cdot x$ területéhez adva az *x* oldalú négyzet x^2 területét, megkapjuk egy *b* oldalú négyzet b^2 területét. Euklidész ezt valahogy így mondhatta: az $a \cdot x$ területű téglalap területét, x^2 terület-többlettel, b^2 területű négyzetté alakítom. Ezt a terület-többlettel történő „téglalapillesztést" a görögök hiperbolikus illesztésnek nevezték.

Az $a \cdot x = b^2$ alakú egyenlet megoldásánál nincs szükség a terület-hiánnyal vagy a terület-többlettel történő illesztésekre. Itt az *a* oldalhoz, hiány és többlet nélkül, vagyis megegyezésben – görögül parabolikusan – illesztjük a b^2-tel megegyező területű, *x* magasságú téglalapot. Ezt a megegyezésben történő „téglalapillesztést" a görögök parabolikus illesztésnek nevezték. Az $a \cdot x = b^2$ alakú egyenletek körzővel és vonalzóval történő megoldása roppant egyszerű, például a magasság-tétellel: az adott *a* és az ismeretlen *x* távolság mértani közepe a (szintén adott) *b* távolság.

A másodfokú egyenletek megoldásának diszkussziója során a görögök a negatív megoldásokkal nem törődtek, hiszen nem ismerték a negatív számokat, nem tudtak nekik szemléletes jelentést adni: gondolatilag nem tudtak mit kezdeni például egy negatív kecske vagy egy nega-

tív szakasz fogalmával. A negatív szám, a negatív mennyiség nem létezett a számukra. A görögöknél a negatív szám fogalma csírájának nyomait csakis a valódinak tekintett mennyiségek csökkenéseinél, kiadásoknál, valamiféle hiány, vagy valamilyen adósság felléptéként ismerhetjük fel. Bár a görögöknek volt külön jelük a kivonás műveletére, de ezt nem előjelnek, hanem műveleti jelnek tekintették. Ez, és túlzott geometriai szemléletük az oka annak, hogy a másodfokú egyenleteket nem algebrailag, hanem geometriailag oldották meg ([3]).

A másodfokú egyenletekkel kapcsolatosan az elliptikus, a hiperbolikus és a parabolikus illesztések gondolatát Euklidész vetette fel és oldotta meg, de az ellipszis, a hiperbola és a parabola matematikába történő bevezetése Appolóniusz nevéhez fűződik. Dolgozatommal, a több mint 2000 éves gondolatok feleleventésével, tisztelettel adózom valamennyiünk görög mestereinek, a geometria óriásainak, Euklidésznek és Appolóniusznak. Az Ő és kortársaik gondolatainak köszönhetjük, hogy természetfilozófiai szemléletünk gyökerei viszonylag hamar kialakultak ([4]).

A görögök matematikáján való töprengés érdekes gondolati lavinát indíthat el. Bárkiben felmerülhet a kérdés, vajon hogyan és milyen irányban fejlődött volna a görögök matematikája, ha ezeréves matematikai kultúrájuk továbbfejlődését a kereszténység és az iszlám terjeszkedése nem akadályozta volna. Mi lett volna akkor, ha 529-ben a bizánci Justinianus nem záratta volna be az athéni Akadémiát; vagy mi lett volna akkor, ha az arab terjeszkedés alatt, 641-ben Omár kalifa nem gyújtatta volna fel az alexandriai könyvtárat és egyetemet. Sajnálatos tény, de ezen események után számos okos ember nézett más haza után, a görög tudósok „szétszéledtek". Nem véletlen, hogy a tudománytörténészek ettől az időszaktól számítják a történelmi középkort ([5]).

Az $a \cdot x - x^2 = b^2$ és az $a \cdot x + x^2 = b^2$ alakú egyenletek [1]-ben leírt – kissé heurisztikus – megoldása kapcsán elgondolkozhatunk azon, vajon hogyan oldották volna meg a görögök az ilyen συμπτομα-kat, ha az egyenletek jobb oldalán negatív szám, vagyis $-b^2$ állna? Bár a görögök számára az $a \cdot x - x^2 = -b^2$ és az $a \cdot x + x^2 = -b^2$ alakú egyenletek értelmetlenek voltak, számukra az x^2 terület-hiánnyal és az x^2 terület-többlettel történő illesztés nem eredményezhet „negatív területű négyzetet". Ennek ellenére gondolkozzunk el azon, vajon hogyan lehetne az ilyen típusú egyenleteket – „mai fejjel" – körzővel és vonalzóval megoldani. Hogy mire jutottam, szívesen közreadom; már csak azért is, mert „gyönyörű harmóniákat" és szimmetriákat ismerhetünk fel az elmondottak mögött (lásd az ábrákat!). A görögök óta a „harmóniák keresése" minden tudományterület legfontosabb hajtómotorja; a harmóniák felismerése lenyűgözi az embert.

A felvetett probléma geometriai megoldása lehetőségének felismeréséhez az $a \cdot x - x^2 = -b^2$, illetve az $a \cdot x + x^2 = -b^2$ alakú egyenleteket algebrailag – egy kicsit – át kell alakítani; így roppant érdekes eredményekhez juthatunk: az egyenletek megoldhatóságának feltételei is egyszerű geometriai tényekből adódnak; ezeket tehát nem algebrailag, nem a diszkrimináns értékéből, hanem geometriai tényekből állapítjuk meg. A jelen dolgozatomban leírt módszer kapcsán újból tárgyalom az $a \cdot x - x^2 = b^2$ és az $a \cdot x + x^2 = b^2$ alakú egyenletek geometriai megoldását, mivel a most bemutatott módszer már nem olyan heurisztikus, mint amelyet [1]-ben írtam le.

Az $a \cdot x - x^2 = -b^2$ alakú kifejezés –

$$a \cdot x - x^2 = -b^2 \Rightarrow x^2 - a \cdot x = b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (x - a) = b^2 \Rightarrow 4 \cdot x \cdot (x - a) = 4 \cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x - 2 \cdot a) = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot x - a + a) \cdot (2 \cdot x - a - a) = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot x - a)^2 - a^2 = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot x - a)^2 = (2 \cdot b)^2 + a^2$$

– átalakításaival azt kaptuk, hogy az a, a $2b$ és a $2x - a$ mennyiségek között pitagoraszi összefüggés áll fenn; vagyis a felsorolt mennyiségek egy derékszögű háromszög oldalai (*lásd az 1. ábrát!*). Itt a szerkesztéssel kapott $2x - a$ hosszúságú átfogó „tartalmazza" a keresett x távolságot. A gyökvonás kétértékűsége miatt a

$2x - a$ mennyiséget egyszer pozitívnak, majd negatívnak kell gondolnunk, így hosszát $2x - a$-nak illetve $-(2x - a)$ -nak kell venni.

Ha a $2x - a$ mennyiség pozitív, akkor az a távolság $2x - a$ átfogóra történő hozzáfűző átkörzésével, vagyis hozzáadásával, előáll a $2x$ távolság ($2x \equiv MN$), amelynek felezésével – pozitív előjelű távolságként – áll elő egyenletünk első, a (pozitív előjelű) x_1 megoldása. Ha a $2x - a$ mennyiség negatív, akkor az a befogó hosszát, az átfogó $a - 2x$ hosszúságából, levonó átkörzéssel levonva, negatív előjelű $2x$ távolságot kapunk, amelynek felezésével távolságként kapjuk meg egyenletünk másik, a (negatív előjelű) x_2 megoldását (lásd az *1. ábrát!*).

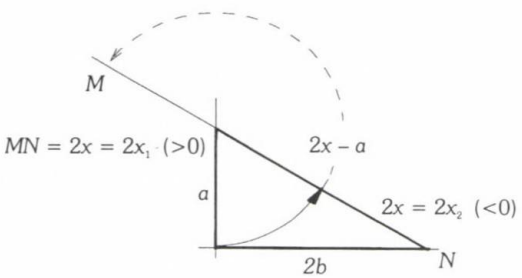
Az *1. ábráról* látszik, hogy a derékszögű háromszög megszerkeszthetőségének, tehát az $a \cdot x - x^2 = -b^2$ egyenlet megoldhatóságának nincs semmilyen geometriai feltétele; de ennek így is kell lennie, hiszen az ilyen alakú egyenlet diszkriminánsa, az $a^2 + 4b^2$ mindig pozitív. Ilyen esetben mindig két gyököt várunk.

Az $a \cdot x + x^2 = -b^2$ alakú kifejezés –

$$a \cdot x + x^2 = -b^2 \Rightarrow x^2 + a \cdot x + b^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot (x + a) + b^2 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x \cdot (x + a) + 4 \cdot b^2 = 0$$
$$2 \cdot x \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot a) + (2 \cdot b)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 \cdot x + a - a) \cdot (2 \cdot x + a + a) + (2 \cdot b)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 \cdot x + a)^2 - a^2 + (2 \cdot b)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 \cdot x + a)^2 + (2 \cdot b)^2 = a^2$$

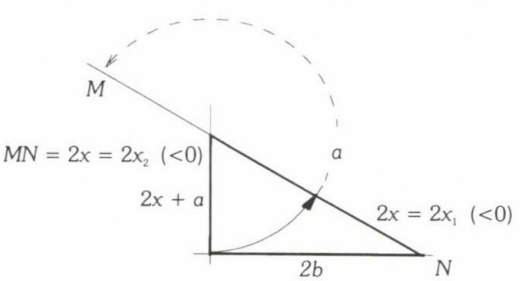
– átalakításaival azt kaptuk, hogy az a, a $2b$ és a $2x + a$ mennyiségek között pitagoraszi összefüggés áll fenn; vagyis a felsorolt mennyiségek egy derékszögű háromszög oldalai (lásd a *2. ábrát!*). Itt a szerkesztéssel kapott $2x + a$ hosszúságú befogó „tartalmazza" a keresett x távolságot. A gyökvonás kétértékűsége miatt a $2x + a$ mennyiséget egyszer pozitívnak, majd negatívnak kell gondolnunk, így hosszát $2x + a$-nak illetve $-(2x + a)$-nak kell venni.

A 2. ábráról azonnal látszik, hogy a derékszögű háromszög megszerkeszthetőségének, az $a \cdot x + x^2 = -b^2$ egyenlet megoldhatóságának geometriai feltétele: $a > 2b$, hiszen az a átfogónak nagyobbnak kell lennie bármelyik befogónál (így a $2x + a$-nál is). Ezen megoldhatósági feltétel érdekessége az, hogy ezt geometriai tényekből, és nem algebrai megfontolásokból kaptuk meg. Egyenletünk algebrai megoldhatóságának jól ismert indoka: az ilyen egyenlet diszkriminánsa $a^2 - 4b^2$, ezért a megoldhatóság feltétele: $a > 2b$. A *2. ábráról* az is látszik, hogy egyenletünk megoldása nem lehet pozitív mennyiség, különben az a hosszúságú átfogó nem lenne nagyobb a másik, a $2x + a$ hosszúságú befogónál. Ezt persze ránézéssel is tudhatjuk: az $a \cdot x + x^2 = -b^2$ alakú egyenletnek pozitív megoldása nem lehet, hiszen ilyen esetben a kiindulási egyenletünk bal oldala pozitív lesz, a jobb oldalán viszont negatív szám áll. Ha a $2x + a$ hosszúságú befogót (levonó átkörzéssel) levonjuk az a hosszúságú átfogóból, akkor egy



1. ábra

Az $a \cdot x - x^2 = -b^2$ alakú (elliptikus) egyenlet geometriai megoldásának vázlata; az a és 2b távolságok ismeretében a derékszögű háromszög megszerkeszthető, így az egyenlet gyökeit a bejelölt $2x_1$ és $2x_2$ távolságok megfelezésével kapjuk meg



2. ábra

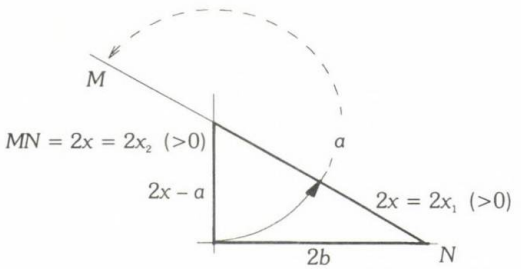
Az $a \cdot x + x^2 = -b^2$ alakú (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldásának vázlata; az a és 2b távolságok ismeretében a derékszögű háromszög megszerkeszthető, így az egyenlet gyökeit a bejelölt $2x_1$ és $2x_2$ távolságok megfelezésével kapjuk meg

$2x$ hosszúságú negatív távolságot kapunk, amelynek felezésével megkapjuk egyenletünk első (negatív előjelű) megoldását, az x_1-et. Egyenletünk másik megoldását az átfogó újbóli elmetszésével (az M pontnál) állíthatjuk elő. Ha a $2x + a$ hosszúságú befogót (a negatív előjelű befogót, hozzáfűző átkörzéssel) az a hosszúságú átfogóhoz adjuk ($-(2x + a) + a = -2x$), akkor egy $2x$ hosszúságú negatív távolságot kapunk ($2x \equiv MN$), amelynek felezésével megkapjuk az $a \cdot x + x^2 = -b^2$ alakú egyenlet másik, negatív előjelű megoldását, az x_2-t.

Az $a \cdot x - x^2 = b^2$ alakú kifejezés –

$$a \cdot x - x^2 = b^2 \Rightarrow -x \cdot (x - a) = b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4 \cdot x \cdot (x - a) = 4 \cdot b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 \cdot x \cdot (2 \cdot x - 2 \cdot a) = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -(2 \cdot x - a + a) \cdot (2 \cdot x - a - a) = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\{(2 \cdot x - a)^2 - a^2\} = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - (2 \cdot x - a)^2 = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = (2 \cdot b)^2 + (2 \cdot x - a)^2$$

– átalakításaival azt kaptuk, hogy az a, a $2b$ és a $2x - a$ mennyiségek között pitagoraszi összefüggés áll fenn; vagyis a felsorolt mennyiségek egy derékszögű háromszög oldalai (lásd a *3. ábrát!*). Itt a szerkesztéssel kapott $2x - a$ hosszúságú befogó „tartalmazza" a keresett x távolságot. A gyökvonás kétértékűsége miatt a $2x - a$ mennyiséget egyszer pozitívnak, majd negatívnak kell gondolnunk, így hosszát $2x - a$-nak illetve $-(2x - a)$-nak kell venni.



3. ábra

Az $a \cdot x - x^2 = b^2$ alakú (elliptikus) egyenlet geometriai megoldásának vázlata; az a és 2b távolságok ismeretében a derékszögű háromszög megszerkeszthető, így az egyenlet gyökeit a bejelölt $2x_1$ és $2x_2$ távolságok megfelezésével kapjuk meg

A *3. ábráról* azonnal látszik a derékszögű háromszög megszerkeszthetőségének, az $a \cdot x - x^2 = -b^2$ alakú egyenlet megoldhatóságának a geometriai feltétele: $a > 2b$; az a átfogónak nagyobbnak kell lennie bármelyik befogónál, így a $2b$-nél is és a $2x - a$-nál is. A $2x - a$ befogó ($a - 2x$, vagy $2x - a$) hosszának a átfogóra történő (kétszeri) átkörzésével, levonásával és hozzáadásával (a második metszéspont az M pontnál) előállítható egyenletünk mindkét pozitív gyöke: az x_1 és az x_2 megoldások kétszerese (lásd a *3. ábrát!*); ezek megfelezésével kapjuk meg a keresett gyököket. A *3. ábráról* az is látszik, hogy egyenletünk x megoldása nem lehet negatív mennyiség, különben az a hosszúságú átfogó nem lenne nagyobb a $2x - a$ hosszúságú befogónál. Ezt persze ránézéssel is tudhatjuk, hiszen az $a \cdot x - x^2 = b^2$ alakú egyenletnek nem lehet negatív előjelű megoldása; negatív x esetén ellentmondáshoz jutunk: az egyenlet bal oldalán negatív, jobb oldalán viszont pozitív szám lesz. Itt is érdemes megemlíteni, hogy egyenletünk megoldhatóságának feltételét geometriai tényekből és nem algebrai megfontolásokból kaptuk meg (az $a \cdot x - x^2 = b^2$ alakú egyenlet diszkriminánsa $a^2 - 4b^2$, ezért az algebrai megoldhatóság feltétele: $a > 2b$).

Az $a \cdot x + x^2 = b^2$ alakú kifejezés –

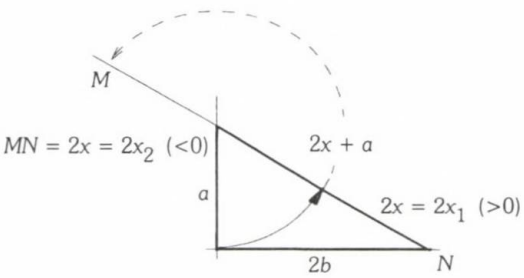
$$a \cdot x + x^2 = b^2 \Rightarrow x \cdot (a + x) = b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 \cdot x \cdot (a + x) = 4 \cdot b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 \cdot x \cdot (x + a) = 4 \cdot b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot a) = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 \cdot x + a - a) \cdot (2 \cdot x + a + a) = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 \cdot x + a)^2 - a^2 = (2 \cdot b)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 \cdot x + a)^2 = (2 \cdot b)^2 + a^2$$

– átalakításaival azt kaptuk, hogy az a, a $2b$ és a $2x + a$ mennyiségek között pitagoraszi összefüggés áll fenn; vagyis a felsorolt mennyiségek egy derékszögű háromszög oldalai (lásd a *4. ábrát!*). Itt a szerkesztéssel kapott $2x + a$ hosszúságú átfogó „tartalmazza" a keresett x távolságot.

A gyökvonás kétértékűsége miatt a $2x + a$ mennyiséget egyszer pozitívnak, majd negatívnak kell gondolnunk, így hosszát $2x + a$-nak illetve $-(2x + a)$ -nak kell venni.

A *4. ábráról* látszik, hogy a derékszögű háromszög megszerkeszthetőségének, így az $a \cdot x + x^2 = b^2$ egyenlet megoldhatóságának nincsen geometriai feltétele; de ennek így is kell lennie, hiszen az ilyen alakú egyenletek diszkriminánsa, az $a^2 + 4b^2$ mindig pozitív. Ilyen esetekben két gyököt várunk: az a befogó $2x + a$ átfogóra történő kétszeri átkörzésével, levonással, illetve hozzáadással (a második metszéspont az M pontnál) előállítható egyenletünk mindkét gyöke: a pozitív x_1 és a negatív x_2 megoldások kétszerese (lásd a *4. ábrát!*); ezek megfelezésével kapjuk meg a keresett gyököket.

A másodfokú egyenletek körzővel és vonalzóval történő megoldása nem új keletű dolog. Mindenesetre nagyon érdekes, hogy az általam leírt módon az egyenletek mindkét gyökét meg lehet szerkeszteni. Szerintem az is nagyon meglepő, hogy az egyenletek megoldhatósága milyen egyszerű geometriai feltételekből adódik; de a legmeglepőbb dolog az, hogy milyen szép szimmetriákat illetve hasonlóságokat lehet felismerni az egyes megoldások között (lásd pl. a táblázatot!). A bemutatott módszer kapcsán bízom abban, hogy az itt leírtak sok örömet okoznak tanárnakdiáknak egyaránt; és abban is bízom, hogy $a - b^2$ és a negatív megoldások miatt „szigorú görög mestereink nem forognak a sírjukban".



4. ábra

Az $a \cdot x + x^2 = b^2$ alakú (hiperbolikus) egyenlet geometriai megoldásának vázlata; az a és 2b távolságok ismeretében a derékszögű háromszög megszerkeszthető, így az egyenlet gyökeit a bejelölt $2x_1$ és $2x_2$ távolságok megfelezésével kapjuk meg

Dolgozatomat – köszönet és hálaként – egykori matematikatanáraim emlékének ajánlom

Számtan- és mértantanáraim a Solymári Általános Iskolában: Horváthné, Erzsébet tanító néni; Szentpéteri Endre tanító bácsi; Temesi Mátyás tanító bácsi; Gróbné Bacsányi Gyöngyi tanárnő, általános iskolai tanár; Csöndes József tanár úr, általános iskolai tanár.

Matematikatanárom az Esztergomi Szent István Gimnáziumban: Marton Kálmán tanár úr, középiskolai matematikatanár.

A JATE Bolyai Intézetében matematikára oktató tanáraim (és akkori beosztásuk); az Ő aláírásuk szerepel az indexemben: Dr. Rédey László egyetemi tanár, Dr. Leindler László egyetemi tanár, Dr. Tandori Károly egyetemi tanár, Dr. Soós Gyula egyetemi tanár, Dr. Fodor Géza egyetemi tanár, Dr. Szőkefalvi-Nagy Béla egyetemi tanár, Dr. Kalmár László egyetemi tanár, Dr. Csákány Béla egyetemi docens, Dr. Pintér Lajos egyetemi docens, Dr. Muszka Dániel tudományos főmunkatárs, Dr. Gehér László egyetemi adjunktus, Dr. Megyesi László egyetemi adjunktus, Dr. Peák István egyetemi adjunk-

Az egyenlet típusa	A megoldhatóság geometriai feltétele és az algebrai feltétel	Gyökök száma és előjele
$a \cdot x - x^2 = -b^2$	Nincs geometriai feltétel Az $a^2 + 4b^2$ diszkrimináns mindig pozitív	Két gyök, + és –
$a \cdot x + x^2 = -b^2$	$a > 2b$ A diszkrimináns: $a^2 - 4b^2 > 0$	Két negatív gyök Pozitív gyök nem is lehet
$a \cdot x - x^2 = b^2$	$a > 2b$ A diszkrimináns: $a^2 - 4b^2 > 0$	Két pozitív gyök Negatív gyök nem is lehet
$a \cdot x + x^2 = b^2$	Nincs geometriai feltétel Az $a^2 + 4b^2$ diszkrimináns mindig pozitív	Két gyök, + és –

1. táblázat

tus, Dr. Berkes Jenő egyetemi adjunktus, Dr. Csúriné dr. Paár Piroska egyetemi adjunktus, Dr. Szenthe János egyetemi adjunktus, Dr. Hatvani László egyetemi tanársegéd, Dr. Durszt Endre egyetemi tanársegéd, Dr. Szűcs József egyetemi tanársegéd, Dr. Pollák György tudományos munkatárs, Dr. Pávó Imre tudományos munkatárs, Dr. Salánkiné dr. Gulácsi Sára tudományos munkatárs, Dr. Hunya Péter tudományos munkatárs, Dr. Csúri József középiskolai tanár és Dr. Bakos László középiskolai tanár.

Feladatok

1. Oldja meg geometriailag a $20 \cdot x - x^2 = 64$ (elliptikus) egyenletet! ($x_1 = 4$ és $x_2 = 16$).

2. Oldja meg geometriailag a $12 \cdot x + x^2 = 64$ (hiperbolikus) egyenletet! ($x_1 = 4$ és $x_2 = -16$).

3. Oldja meg geometriailag a $12 \cdot x - x^2 = -64$ (elliptikus) egyenletet! ($x_1 = 16$ és $x_2 = -4$).

4. Oldja meg geometriailag a $20 \cdot x + x^2 = -64$ (hiperbolikus) egyenletet! ($x_1 = -4$ és $x_2 = -16$).

5. Oldja meg geometriailag a $16 \cdot x = 64$ (parabolikus) egyenletet! ($x = 4$).

6. Oldja meg geometriailag Brahmagupta híres, a $10 \cdot x + x^2 = 39$ alakban megadott (hiperbolikus) egyenletét is! ($x_1 = 3$ és $x_2 = -13$; Brahmagupta módszerével csak az $x_1 = 3$ gyököt lehet megtalálni).

Irodalom

[1] Ringler András: Másodfokú egyenletek geometriai megoldása, 2002, POLYGON, Szeged, XI. évfolyam, 2. szám, 60-65.

[2] Ringler András: A $\sqrt{2}$, 2003, A Matematika Tanítása, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, XI. évfolyam, 2. szám, 17-23.

[3] Filep László: A tudományok királynője, 1997, TYPOTEX Kft. – Budapest, Bessenyei Kiadó – Nyíregyháza, ISBN 963 7546 83 9.

[4] Ringler András: Fizikai szemléletünk gyökerei, 2001, A Fizika Tanítása, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, IX. évfolyam, 4. szám, 4-10.

[5] Simonyi K.: A fizika kultúrtörténete, 1998, Akadémiai Kiadó.

Peller József

Nélkülözhető-e a párhuzamos szelők tétele?

Számos olyan témakör van, amelyet az oktatás minden tagozatán tanítunk. Ezek közé tartozik a hasonlóság is.

Miben térnek el, hogyan kapcsolódnak egymáshoz a tagozatonkénti feldolgozási módok? Adott tagozaton a feldolgozások matematikailag egyenértékűek, és csak didaktikailag különböznek? Itt szakítsuk meg a felvethető kérdések sorozatát, mert könnyen a közoktatási szabályzók alkalmazásának kényes területére tévedhetünk.

Maradjunk meg a témakör vizsgálatakor *a fogalomalkotás szempontjánál.* Persze a ma forgalomban lévő tankönyvek sokaságának vizsgálatára nem vállalkozom. Mondandóm az irodalomban megjelölt tankönyvek ismeretén alapul. Úgy vélem, hogy érdemes figyelmünket a matematikaoktatás megújhodása előtti időszakra is kitágítani. Így jelenünk értékeire és problémáira is fény derül.

I. Kezdjük tehát a jó három évtizeddel ezelőtti állapot jellemzésével. Ez az időszak könnyen áttekinthető.

Az **alsó tagozaton** a geometria tanítása a négyzet és a téglalap megismerésére, kerületének és területének kiszámítására korlátozódott.

A **felső tagozaton** a [7] könyv szerint tanították a hasonlóságot. A köznapi életben használt tervrajz, illetve a középponti vetítéssel készült ábra elemzésével készítik elő a következő definíciót:

Ha két sokszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő, és a megfelelő szögek is egyenlők, akkor a sokszögek hasonlók.

A háromszögek hasonlóságának alapesetei közül kettőt *empirikusan* állapítanak meg. A tanulók néhány szakaszt rajzolnak. Ezek egyik végére ugyanakkora szöget, a másik végére ettől különböző, ugyanakkora szöget rajzolnak. A keletkezett háromszögek oldalait lemérik. Megállapítják, hogy a megfelelő oldalak aránya megegyezik, tehát a definíció szerint hasonlók.

A másik esetben egy megrajzolt háromszög oldalainak kétszeresével, illetve felével háromszögeket szerkesztenek. Méréssel állapítják meg a szögek egyenlőségét.

Hasonló alakzatok négyzethálón való előállítása mellett a pontból vetítés is szerepel. Ezt a módszert úgy vezetik be, hogy két hasonló háromszöget megfelelően összeillesztenek. Adott szakasz kívánt arányú felosztásának módját hasonló háromszögek alapján indokolják.

Ezt az eljárást, amely indukcióval indul és az alkalmazásoknál áthajlik a dedukcióra, matematikailag korrektnek tekinthetjük. Elődeink bölcs megoldást választottak, különösen akkor, ha az előzményeket is figyelembe vesszük.

Ebben az időben a **középiskolában** a hasonlóság tanítása már a *deduktív felépítés nyomvonalán halad.* (Lásd [5]). A középpontos hasonlóság egyenestartó tulajdonságának bizonyítása a [6] könyvben szerepel. Ez jelzi, hogy a szerzők jól tudták: a feldolgozás a tanulóknak nehéz, ahol lehet, enyhítésre szükség van.

Az előzmények után a pőre dedukció tanártól és diáktól egyaránt szellemi erőfeszítést kíván. A siker azon áll, vagy bukik, hogy a tanár el tudja-e fogadtatni tanulóival: *a hasonlóságot új módon kell felfogni, tiszta lappal kell indulni, a korábbi fogalmak, ismeretek nem használhatók. Ezekre majd fény derül, addig azonban türelmesnek kell lenni.* (Kevés ilyen kritikus helyzet van. Az exponenciális függvény kialakításakor kerülünk ilyen „sivatagba", amikor a tanulókat a logaritmus „oázisának" ígéretével csábítjuk magunk után.)

A középpontos hasonlóság definíciójának megalkotása után három tulajdonságát kell igazolni.

1. Az egyenes képe egyenes.

2. Az egyenes képe vele párhuzamos egyenes.

3. Ha a hasonlóság aránya k, akkor bármely szakasz képe az eredeti szakasz k-szorosa.

Ezeknek a bizonyítása a – már előzőleg igazolt – *párhuzamos szelők tételén és annak megfordításán alapszik.* (Ezután az aránytartás, a szögtartás már adódik.)

II. Térjünk át a jelenlegi oktatásunk jellemzésére!

Az **alsó tagozatos** oktatás már régóta kiterjedt a matematikai ismeretszerzés forrásainak mindegyikére. A tanulók hasonlóságról alkotott képzeteinek gondozása, tervszerű fejlesztése is megindul.

Fénykép kapcsán az *ugyanolyan alakú* fogalmával ismerkednek meg. Négyzethálóra rajzolt ábrákat – amelyek jórészt szakaszokból állnak – nyújtott (zsugorított) négyzethálóra, illetve téglalap-, paralelogramma hálóra másolnak át. *A hasonlót az affin képek között ismerik fel.* Jól tudják, hogy másolás közben arra kell ügyelniük, hogy az ábra minden *ízében ugyanannyiszorosára változzék.* A hasonló alakzatok területének és térfogatának változásáról is tapasztalatokat szereznek. (Az „alaprajz" hálójába írt számok szerint kockákkal építményt emelnek.) Jó alap képződik tehát a hasonlóság fogalmának a megalkotásához.

A **felső tagozaton** a hasonlóság tanítása a már megtett út bejárásával kezdődik. (Lásd [2]) Majd újabb tapasztalatok után a hasonló alakzat fogalmát határozzák meg:

A) Két alakzat hasonló, ha bármely két megfelelő szakaszának aránya állandó.

Az előkészítés során paralelogramma középpontos (háromszoros) nagyítása is szerepel. Megállapítják, hogy az eredeti és a nagyított kép megfelelő szakaszainak aránya megegyezik. Így az előző definícióhoz nyomban társul:

B) A geometriai transzformációt hasonlóságnak nevezzük, ha a szakasz képének és az eredeti szakasznak az aránya állandó, bárhogyan is választjuk meg a szakaszt.

A hasonlóság kifejtése először *az alakzatok* – az *A*-val jelölt – *irányába folytatódik.* A definíció alapján azonban a hasonlóság adott esetben nem dönthető el. Hány szakasz arányának megállapítása lenne elegendő? A háromszögek hasonlóságának alapeseteit igazolják. *A bizonyításba beépül a párhuzamos szelők tétele és ennek megfordítása.* A szakasz egyenlő részekre való osztásának módját még az egybevágóság során indokolták. Feladatként az is szerepel, hogy a háromszög oldalait egyenlő részekre osztva, miként bontható a háromszög egybevágó háromszögekre, az ún. *háromszögrácsra.* Ez a párhuzamos szelők tételének megfordítását jelenti. Ezt a menetet a tankönyv következetesen érvényesíti. *A feldolgozás minősége* – ami a párhuzamos szelők tételének alkalmazását illeti – *a középiskolaival egyenértékű.* Ezután már megnyílik a lehetőség az alkalmazásokra, amely jóval gazdagabb lehet, mint korábban volt, hiszen a tanulók ismerik már *Pitagorasz tételét, s a koordináta-rendszert.*

Az előzőben a hasonlósági transzformációt mint második – *B*-vel jelölt – irányt neveztük meg. *Az alkalmazások után ennek a fogalomnak a kialakítása is megkezdődik, de kifejtése a középiskolára marad.* A tanulók már az alsó tagozaton megismerik az egybevágósági transzformációkat, amelyekre vonatkozó ismereteik azóta tovább gazdagodtak, bár operatív alkalmazásukban még járatlanok. *A tananyag matematikai, logikai egyensúlya miatt nemcsak kívánatos, hanem szükséges is a középpontos hasonlóság fogalmának kialakítása.*

A tankönyvnek ez a fejezete *a pontszerű fényforrással való vetítés* tapasztalatával kezdődik.

Ezen a tagozaton valóban hasznos az árnyékjáték. Azért nevezem így, mert a tanulók nagyon élvezik, ha játékos kedvüknek teret adunk. Tervezésekor erre eleve gondolni kell, nem szabad csak a mi céljainkra korlátozódni. Sajnos ebben magam is hibáztam, menet közben improvizáltam. A kellékek (alkalmas tárgyak, kivágott kartonlapok, fóliára rajzolt négyzetháló) és a forgatókönyv elkészítése sok munkával jár. Az is megfontolandó, hogy a térbeli vetítésből miként következik a síkbeli, s az említett három tulajdonság hogyan érzékeltethető. Bizonyára van olyan kolléga, akinek ilyen rendezésben nagy gyakorlata van. Jó lenne, ha cikkbe foglalná.

A középpontos hasonlóság fogalmának kialakítása után ennek a 2. és 3. tulajdonságát a tankönyv hasonló háromszögekkel bizonyítja. Ilyen felépítés esetén ez lehetséges, amelynek jellemzőjeként kiemelhetjük: *az alakzatok hasonlóságáról átvált a hasonlósági transzformációra.*

III. Kétségtelen, hogy a három tagozat közül a középső (a felső tagozat) van a legnehezebb helyzetben. Itt a hasonlóság olyan feldolgozása kívánatos, amely a **Hiele**-*féle, a lokális logikai rendezés szintjének felel meg.* Ez képezhetné a hidat az alsó tagozat és a középiskola között.

Ebbe a problémába – a felső tagozaton végzett kísérlet során – magunk is beleütköztünk. Elgondolásunk eredetileg az volt, hogy a témakört *a középpontos hasonlóság fogalmának kialakításával kezdjük, három tulajdonságát kiemeljük, szemléletből elfogadjuk. Ezek tudatos alkalmazásával ezután deduktív felépítésre térünk át.* Közben azonban a tulajdonságok egyenkénti bizonyításának lehetősége is felvillant. A **2.** tulajdonság indirekt módon könnyen igazolható. (Az egyenes és képe nem metszheti egymást).

A feldolgozás végül úgy alakult ki, hogy *a tanulók helyzetébe képzeltük magunkat, s minden szituációban a számukra indokolható lépést igyekeztünk megtalálni.*

Ezután áttérünk ennek a feldolgozásnak a vázlatos ismertetésére. A felépítést olyan tagolásban közöljük, hogy a fogalomalkotás szempontjából követhető legyen. A feladatcsoportok értékesítésének minden részletére nem térünk ki. (Részletesen lásd [1] 63-90. oldalán)

1. Az osztályt oszlopok szerint hat csoportra bontjuk. Az egy csoportba tartozók ugyanazt a feladatot oldják meg. A tanulók négyzethálós papírra rajzolnak.

a) Rajzoljatok négyzetet (háromszöget, paralelogrammát, egyenlőoldalú háromszöget, téglalapot, hatszöget)!

b) Mindenki rajzoljon síkidomához hasonlót!

c) Mindenki rajzoljon ugyanolyan fajta síkidomot, de ne legyen hasonló!

Lehet, hogy a hatszöghöz hasonlót senki sem tudott rajzolni. Ennek módját megmutatják. (Az egyik csúcsból kiinduló oldalakat és átlókat kétszeresére nyújtjuk.)

A következő állítások eldöntéséből tájékoztatást kapunk a tanulók *hasonlóságról alkotott képzetéről.*

2. Mi a véleményed? Igaz, vagy hamis?

a) Bármely két rombusz hasonló.

b) Bármely két kör hasonló.

c) Van olyan két téglalap, amelyek nem hasonlók.

d) Ha két rombusz egy szögben megegyezik, akkor hasonlók.

e) Az egyik paralelogramma átlói e és f, a másiké $3e$ és $3f$. Ez a két paralelogramma hasonló.

f) Az egyik téglalap oldalai a és b, a másiké $5a$ és $5b$. Ez a két téglalap hasonló.

A hamis állítások példával igazolhatók. Az igaz állításokat a tanulók még nem tudják igazolni. *A képzet és a fogalom közötti különbségre őket is rá kell döbbenteni.*

„Azt mondjátok, hogy bármely két négyzet hasonló. Miért? Amikor azt mondtam, hogy a téglalap hasonló a rombuszhoz, akkor meg nevettetek. Meg kellene mondani, hogy miért nevezünk két síkidomot hasonlónak. Annak a kiderítésével fogunk foglalkozni, hogy szemléletünk milyen matematikai tartalmat rejt magában."

Előkészítjük a középpontos hasonlóság definícióját, és bizonyításra hangoljuk a tanulókat. A következőkben feltételezzük a paralelogramma definíciójának, és a háromszög középvonalára vonatkozó tétel ismeretét.

3. A táblára rajzolt paralelogramma megfelelőjét a tanulók füzetükbe szerkesztik meg.

„Nyújtsuk meg a paralelogramma A csúcsából kiinduló oldalait és átlóját kétszeresére. A megnyújtott szakaszok végpontjait jelöljük: B', D', C'. (De még nem kötjük össze.)" Rögzítjük: $AB' = 2AB$, $AD' = 2AD$, $AC' = 2AC$.

A nyújtásról áttérünk a pontok hozzárendelésének jelölésére: $B \to B'$, $D \to D'$, $C \to C'$, $A \to A'$ $(A = A')$.

„Bizonyítsuk be, hogy az $AB'C'D'$ valóban paralelogramma!" A tanulók próbálkozásának, minden gondolatának helyt adunk. (Viharos vita is kialakulhat.) *Ezután jelölések alkalmazásával a bizonyítást mintaszerűen rögzítjük.* Ebben az esetben azt is igazolhatjuk, hogy a szakasz képe szakasz.

4. Ezután következhet *a középpontos hasonlóság definíciója a megszokott módon.*

A sík (tér) minden pontjához a definíció szerint egyértelműen rendelhető egy pont. Ezt a hozzárendelést – elvileg – az alakzat minden pontjára egyenként kell alkalmazni, a kapott képpontok halmaza alkotja az alakzat képét. Nem árt kiemelni: adott alakzat esetében a középpontos hasonlóságnak, mint függvénynek az értelmezési tartományát erre az alakzatra szűkítjük le.

Van-e olyan síkidom, amelynek a képe könnyen megszerkeszthető? A tanulók előbb-utóbb rájönnek: **a kör ilyen.**

5. Rajzoljunk C középpontú r sugarú kört! Nagyítsuk a C pontból háromszorosára!

Nyilvánvaló, hogy a képe C középpontú $3r$ sugarú kör lesz. Nagyon fontos, hogy nyomban a következőket is állapítsuk meg: ha $CB < r$, azaz B az eredeti kör belső tartományának pontja, akkor $CB' < 3r$, tehát B' a képkör belső tartományának pontja lesz. Analóg eset áll fenn a külső tartomány pontjára is. (Az eredeti kör „külső" pontja, a képkör „külső" tartományának pontja.)

Ezeknek az egyszerű észrevételeknek a hasznosítása előtt nagyítsuk (kicsinyítsük) a C középpontú kört akkor, amikor *az arányt nem számmal adjuk meg, hanem a kör valamely P pontjának P' képét a CP félegyenesen jelöljük meg.* (Ha a tanulók számfogalma már elég fejlett, akkor tudják, hogy van olyan pozitív k szám, hogy $CP' = kCP$.)

6. *Vajon az egyenesnek mi lesz a képe?* (Ha az egyenes a C-n áthalad, akkor nyilvánvaló, hogy maga az egyenes.)

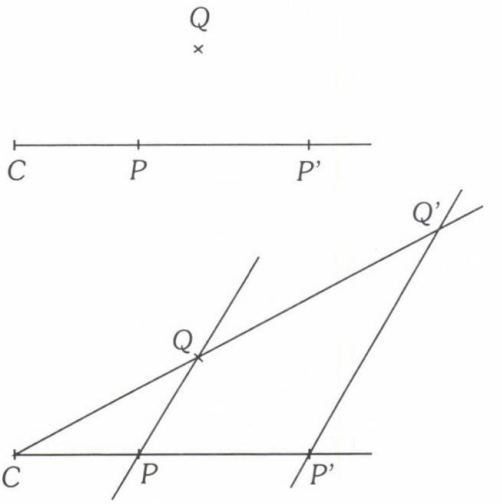
Vegyünk tehát fel a C ponton át nem haladó egyenest! Hogyan tovább? Mi az, amit már tudunk? *Szerkesszük meg azt a kört, amelynek az e egyenes érintője!* Az érintési pontot jelöljük E-vel. Az e egyenes minden pontja – E kivételével – a kör külső tartományában van. (Bár egyszerű dologról van szó, az olvasónak javaslom, hogy közben rajzoljon.)

Jelöljük meg a kör valamely P pontjának képét a CP félegyenesen! Szerkesszük meg a kialakult ábra képét! A kör képe C középpontú kör, amely a P' ponton áthalad. Mi lesz az egyenes képe? Az e egyenes E pontjának képe, az E' a képkörön lesz, *a többi pontja a képkör külső tartományában van. Csak ennyit tudunk, tehát elvileg az e képe igen szeszélyes ponthalmaz is lehet.*

Most szükségünk lenne az 1. tulajdonságra, amelyet azonban a párhuzamos szelők tételének megfordítása nélkül nem tudunk bizonyítani. Jegyezzük meg, amire rábukkantunk.

Fogadjuk el, hogy az egyenes képe egyenes és nézzük meg, így mire jutunk. Az e egyenes képe nyilván a képkör érintője lesz, amely e-vel párhuzamos. Tehát az e egyenes e' képe az e-vel párhuzamos. *Tehát a 2. tulajdonság már bizonyítható.*

7. Ábra kíséretében tűzzük ki a következő feladatot. *Szerkesszük meg a Q pont képét!* (Amit már tudunk, azt használjuk fel.)

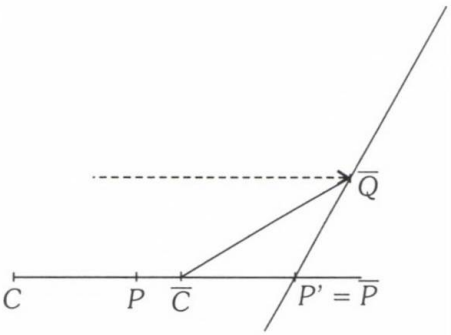


1. ábra

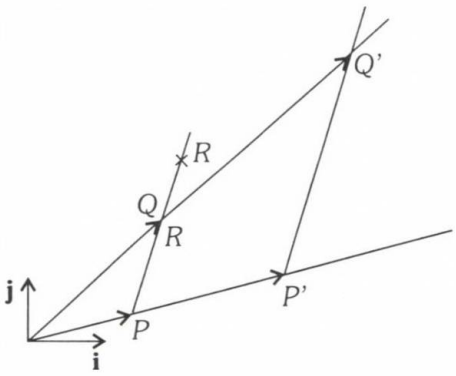
A Q pont rajta van a CQ félegyenesen. S még hol? A PQ egyenes képén, amely a P'-n áthaladó vele párhuzamos egyenes. Rögzítsük: ha $CP' = kCP$, akkor $CQ' = kCQ$.

8. Igaz-e, hogy $P'Q' = k \cdot PQ$? *Tehát igaz-e, hogy a szakasz képe akkor is k-szorosa az eredetinek, ha ezek nem a C-n áthaladó félegyenesen helyezkednek el?*

No, most mit tegyünk? Jó lenne, ha a PQ szakasz a $P'Q'$ szakaszra illeszkedne. Bár egyelőre fogalmunk sincs arról, hogy ez az ötlet mire vezet. *Toljuk el tehát a CPQ háromszöget úgy, hogy a P pont a P' pontba kerüljön.* Mivel a PQ és a $P'Q'$ egyenesek párhuzamosok, ezért az eltolás után a PQ szakasz valóban illeszkedni fog a $P'Q'$ félegyenesre. Az eltolással nyert háromszög csúcsait – az érthetőség miatt – jelöljük rendre: $\overline{C}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$.



2. ábra



3. ábra

Hogyan tovább? *A kialakult ábra sugallja, hogy a $\overline{P}$ középpontú és k arányú hasonlósági transzformációra térjünk át.* Mivel $CP' = kCP$, ezért a $\overline{P}$ középpontból a $\overline{CP}$ szakasz *k*-szorosára nyúlik, tehát a $\overline{C}$ képe a *C* pont lesz.

Hol lesz a $\overline{Q}$ képe? Mivel a $\overline{CQ}$ egyenes képe a vele párhuzamos, $\overline{C}$ képén, a *C*-n áthaladó egyenes, másfelől a $\overline{PQ}$ félegyenesen is rajta van, ezek közös pontja pedig a *Q'*. Tehát $\overline{Q}$ képe *Q'* s így $P'Q' = k\overline{PQ} = kPQ$.

Tehát a 3. tulajdonságot is bizonyítottuk.

Bár a további feldolgozásnak sok csínja-bínja van, amellyel a tanulók érdeklődése kiváltható, ennek csak *a menetére utalunk:* hasonlósági transzformáció, ennek alapján a hasonló alakzat fogalma, a hasonló háromszögek alapeseteinek bizonyítása, háromszögek súlyvonalai, súlypontja, válogatás a hasonlóság alkalmazásának gazdagságából.

Befejezésül válaszolhatunk a címben feltett kérdésre: **nem!**

A párhuzamos szelők tétele, megfordítása nem nélkülözhető az 1. tulajdonság bizonyításakor. A 2. és 3. azonban nélküle is igazolható.

Ha azonban a szintetikus feldolgozást „szeplővel" is elfogadhatónak tartjuk, akkor *van lehetőség a kiiktatására.*

Helyezzük a vektorsík kezdő pontját a *C* pontba.

Jelöljük rendre a *P*, *Q*, *P'*, *Q'* pontba mutató vektorokat megfelelően: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$. Ekkor *k* arányú középpontos hasonlóság esetén: $\mathbf{p}' = k\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}' \neq k\mathbf{q}$.

Ezért $\mathbf{q}' - \mathbf{p}' = k(\mathbf{q} - \mathbf{p})$, amiből *a 2. és 3. tulajdonság adódik.*

Ha az *R* pont a *PQ* egyenesnek valamely pontja, akkor az $\mathbf{r}' - \mathbf{p}' = k(\mathbf{r} - \mathbf{q})$ miatt az 1. tulajdonságot is megkapjuk.

Irodalom

[1] Dékány Józsefné-Fedák Judit-Peller József: A matematikaoktatás tartalmának és módszerének korszerűsítése VIII. ELTE TTK Matematikai Módszertani Tanszéki Szakcsoport, 1881.

[2] Dr. Hajdu Sándor (szerkesztésében): Matematika az általános iskola 8. osztálya számára. Tankönyvkiadó, 1991.

[3] Hajnal Imre-Némethy Katalin: Matematika II. Tankönyvkiadó, 1989.

[4] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1980.

[5] Horvay Katalin-Pálmay Lóránt: Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztálya számára. Tankönyvkiadó, 1967.

[6] Horvay Katalin-Pálmay Lóránt: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályában a matematikatanításához. Tankönyvkiadó, 1969.

[7] Kelemen Jánosné-Mosonyi Kálmán: Matematika az általános iskola 8. osztálya számára. Tankönyvkiadó, 1975.

[8] C. Neményi Eszter-Wéber Anikó: Matematika tankönyv az általános iskola 3. osztálya számára. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998.

Csete Lajos

Egy geometriai egyenlőtlenségről

Dr. Pintér Lajosné tanárnőnek ajánlom tisztelettel és köszönettel, aki elemi matematikára és a matematika tanítására tanított.

I. Előzmények és a probléma

Még 1994-ben kaptam néhány problémát *dr. Pintér Lajos* tanár úrtól (Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet). Ezekből egyet sikerült megoldani.

A következőkben e problémát vizsgáljuk. A Szlatinába való *Doru Popescu Anastasiu* vetette fel a következő problémát az amerikai *Mathematics Magazine-ban:* (1994. december, 1460. probléma, [1]).

Legyenek az ABC hegyesszögű háromszög magasságai AA', BB', CC'. Legyenek A_1, B_1, C_1 az AA', BB', CC' egyeneseknek a háromszög köré írható körrel való második metszéspontjai. Igazoljuk, hogy

$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma > 24 \cdot T_0$

ahol T_0 az A'B'C' háromszög területét, míg α, β, γ az ABC háromszög megfelelő szögeit jelöli.

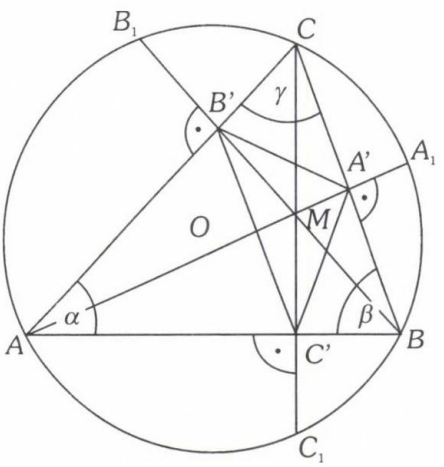
II. A probléma egy megoldása

A következőkben egyszerű geometriai lemmák sorozatán keresztül oldjuk meg a problémát.

1. lemma:

$$MA = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$

ahol R az ABC háromszög köré írható kör sugarának hossza, és M a háromszög magasságpontja. [3]



2. lemma:

$$MA \cdot MA' = 2 \cdot R \cdot \rho,$$

ahol ρ az A'B'C' háromszögbe írható kör sugarának hossza. [3], [5]

3. lemma:

$$MA = \frac{\rho}{\cos\alpha}$$

A 3. lemma bizonyítása:

Az 1. és a 2. lemmát alkalmazzuk.

$$MA' \cdot MA = 2 \cdot R \cdot \rho \text{ és}$$

$$2 \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot MA' = 2 \cdot R \cdot \rho, \text{ ezekből:}$$

$$MA' \cdot MA = 2 \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot MA', \text{ ebből:}$$

$$MA' = \frac{\rho}{\cos\alpha}.$$

4. lemma: [3], [6]

$$MA' = A'A_1$$

A probléma első bizonyítása:

Vegyük észre, hogy $AA_1 = AA' + A'A_1 = AA' + MA'$. (Itt a 4. lemmát alkalmaztuk.)

Az egyenlőtlenségben AA_1 négyzete szerepel, ezért

$$AA_1^2 = (AA' + MA')^2 =$$

$$= AA'^2 + 2 \cdot AA' \cdot MA' + MA'^2$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az AA'^2 és az MA'^2 pozitív számokra!

$$\frac{AA'^2 + MA'^2}{2} \geq \sqrt{AA'^2 \cdot MA'^2}$$

Ebből

$$AA'^2 + MA'^2 \geq 2 \cdot AA' \cdot MA'.$$

Így

$$AA_1^2 = AA'^2 + 2 \cdot AA' \cdot MA' + MA'^2 \geq$$

$$\geq 2 \cdot AA' \cdot MA' + 2 \cdot AA' \cdot MA' =$$

$$= 4 \cdot AA' \cdot MA', \quad \text{azaz} \quad AA_1^2 \geq 4 \cdot AA' \cdot MA'.$$

Mivel $AA_1 > MA'$, ezért valójában:

$$AA_1^2 > 4 \cdot AA' \cdot MA'$$

Most pedig alkalmazzuk a 3. lemmát:

$$AA_1^2 > 4 \cdot AA' \cdot \frac{\rho}{\cos\alpha}$$

Ezt az egyenlőtlenséget fogjuk α-ra, β-ra, illetve γ-ra alkalmazni és ezeket felhasználni a probléma jobb oldalának alsó becslésére.

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma >$$

$$> 4 \cdot AA' \cdot \frac{\rho}{\cos\alpha} \cdot \sin 2\alpha + 4 \cdot BB' \cdot \frac{\rho}{\cos\beta} \cdot \sin 2\beta +$$

$$+ 4 \cdot CC' \cdot \frac{\rho}{\cos\gamma} \cdot \sin 2\gamma =$$

$$= 4 \cdot \rho \cdot \left(\frac{AA' \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{BB' \cdot 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta}{\cos\beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{CC' \cdot 2\sin\gamma \cdot \cos\gamma}{\cos\gamma} \right) =$$

$$= 8 \cdot \rho \cdot (AA' \cdot \sin\alpha + BB' \cdot \sin\beta + CC' \cdot \sin\gamma)$$

Itt felhasználtuk azt, hogy $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ minden valós x-re teljesül.

Tudjuk, hogy

$$T = \frac{AA' \cdot a}{2},$$

ahol T az ABC háromszög területe és $a = BC$. Ebből

$$AA' = \frac{2 \cdot T}{a}.$$

Szintén a középiskolából ismerhetjük, hogy $a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$, ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$AA' = \frac{2 \cdot T}{2 \cdot R \cdot \sin\alpha} = \frac{T}{R \cdot \sin\alpha}.$$

Ezt fogjuk alkalmazni.

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma >$$

$$> 8 \cdot \rho \cdot (AA' \cdot \sin\alpha + BB' \sin\beta + CC' \cdot \sin\gamma) =$$

$$= 8 \cdot \rho \cdot \left(\frac{T}{R \cdot \sin\alpha} \cdot \sin\alpha + \frac{T}{R \cdot \sin\beta} \cdot \sin\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{T}{R \cdot \sin\gamma} \cdot \sin\gamma \right) = 8 \cdot \rho \cdot \left(\frac{T}{R} + \frac{T}{R} + \frac{T}{R} \right) =$$

$$= 8 \cdot \rho \frac{3 \cdot T}{R} = 24 \cdot \rho \cdot \frac{T}{R}$$

A továbbiakban láthatjuk, hogy T és R között kell egy megfelelő kapcsolatot találnunk.

Ismert a következő eredmény:

5. lemma:

$$T = 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

Az 5. lemmát igen könnyen bizonyíthatjuk. Tudjuk, hogy

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \text{ és } a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$

ez utóbbit kétszer alkalmazva és az előbbire írva kapjuk, hogy:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{2 \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot R \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2} =$$

$$= 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

Ezzel igazoltuk az 5. lemmát.

Az 5. lemmát fölhasználva:

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma >$$
$$> 24 \cdot \rho \cdot \frac{T}{R} = 24 \cdot \rho \cdot \frac{2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{R} =$$
$$= 48 \cdot \rho \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Láthatjuk, hogy most az előző szorzat és az $A'B'C'$ háromszög területe között kell összefüggést keresnünk. Az $A'B'C'$ éppen a talpponti háromszög és a talpponti háromszög kerülete és az előző szorzata szoros kapcsolatban van.

6. lemma:

$$K_0 = 4 \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma,$$

ahol K_0 jelöli az $A'B'C'$ talpponti háromszög kerületét. [3], [6]

Alkalmazzuk a 6. lemmát:

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma >$$
$$> 48 \cdot \rho \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma =$$
$$= 12 \cdot \rho \cdot 4 \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 12 \cdot \rho \cdot K_0$$

De egy háromszög beírt körének sugara, a háromszög kerülete és területe között a középiskolából is ismert egyszerű összefüggés van:

$$T_0 = \frac{K_0}{2} \cdot \rho$$

Ezt alkalmazva kapjuk, hogy:

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma >$$
$$> 12 \cdot \rho \cdot K_0 = 12 \cdot 2 \cdot T_0 = 24 \cdot T_0.$$

Ezzel igazoltuk az eredeti probléma egyenlőtlenségét.

Ha megtekintjük a problémát, láthatjuk, hogy határozott egyenlőtlenség szerepel benne. Ez felveti azt a kérdést, hogy vajon a $24 \cdot T_0$ az elérhető legjobb eredmény, vagy esetleg lehet élesíteni a problémát. Mivel eléggé eltér egymástól az AA_1 és az MA', ezért gyanakodhatunk, hogy a problémát lehet élesíteni.

III. A probléma élesítése, bizonyítással

A következő az ötletünk: AA_1 és MA' között szorosabb kapcsolatot keresünk, mint az előbb.

$$AA_1 = MA + MA_1 = MA + 2 \cdot MA'$$

Itt a 4. lemmát alkalmaztuk. Így

$$AA_1^2 = (MA + 2 \cdot MA')^2 =$$
$$= MA^2 + 4 \cdot MA \cdot MA' + 4 \cdot MA'^2$$

A továbbiakban az 1. lemmát és a 3. lemmát alkalmazzuk.

$$AA_1^2 = (2 \cdot R \cdot \cos\alpha) + 4 \cdot 2 \cdot R \cdot \rho + 4 \cdot \left(\frac{\rho}{\cos\alpha}\right)^2 =$$
$$= 4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\alpha + 8 \cdot R \cdot \rho + 4\frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}$$

Most pedig a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk a pozitív

$$4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\alpha \text{ és } 4 \cdot \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}$$

számokra.

$$\frac{4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\alpha + 4 \cdot \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}} = 4 \cdot R \cdot \rho$$

Azaz

$$4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\alpha + \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha} \geq 8 \cdot R \cdot \rho.$$

Következésképpen:

$$AA_1^2 = 4 \cdot R^2 \cdot \cos\alpha + 8 \cdot R \cdot \rho + 4 \cdot \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha} \geq$$
$$\geq 8 \cdot R \cdot \rho + 8 \cdot R \cdot \rho = 16 \cdot R \cdot \rho$$

Ezt alkalmazva háromszor az eredeti probléma bal oldalának alsó becslésére, kapjuk, hogy:

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma \geq$$
$$\geq 16 \cdot R \cdot \rho \cdot \sin 2\alpha + 16 \cdot R \cdot \rho \cdot \sin 2\beta +$$
$$+ 16 \cdot R \cdot \rho \sin 2\gamma = 16 \cdot R \cdot \rho \cdot (\sin 2\alpha +$$
$$+ \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

Felmerül, hogy milyen összefüggést ismerünk a háromszög kétszeres szögei szinuszainak összegére.

Ezzel kapcsolatos a

7. lemma:

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$,

ahol α, β, illetve γ egy tetszőleges háromszög szögei. [3], [8]

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma \geq$$
$$\geq 16 \cdot R \cdot \rho \cdot 4 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma =$$
$$= 16 \cdot \rho \cdot 4 \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 16 \cdot \rho \cdot K_0$$

Itt az utolsó lépésben a 6. lemmát alkalmaztuk. Már készen is vagyunk, mert

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma \geq$$
$$\geq 16 \cdot \rho \cdot K_0 = 16 \cdot 2 \cdot T_0 = 32 \cdot T_0$$

Ezzel igazoltuk a probléma élesítését, hiszen

$$32 \cdot T_0 > 24 \cdot T_0.$$

Felmerül a kérdés, hogy pontosan mikor áll fenn az egyenlőség esete az

$$AA_1^2 \cdot \sin 2\alpha + BB_1^2 \cdot \sin 2\beta + CC_1^2 \cdot \sin 2\gamma \geq$$
$$\geq 32 \cdot T_0$$

élesített problémában.

Ez akkor és csak akkor következik be, ha az ABC háromszög szabályos.

IV. A probléma általánosítása, bizonyítással

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogyan lehetne egy módon általánosítani az élesített problémát.

Vizsgáljuk az AA_1 n-edik hatványát!

$$AA_1^n = (MA + 2 \cdot MA')^n = (2 \cdot R \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \frac{\rho}{\cos\alpha})^n$$

Mint tudjuk, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség n-edik hatványa:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \geq (\sqrt{x \cdot y})^n$$

ahol x és y pozitív valós számok, és itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y$. Ebből

$$(x+y)^n \geq 2^n \cdot (x \cdot y)^{\frac{n}{2}}.$$

Ezt alkalmazzuk:

$$AA_1^n = \left(2 \cdot R \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \frac{\rho}{\cos\alpha}\right)^n \geq$$
$$\geq 2^n \cdot \left(2 \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot \frac{\rho}{\cos\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} =$$
$$= 2^n \cdot 4^{\frac{n}{2}} \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}} = 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}}$$

Kaptuk, hogy:

$$AA_1^n \geq 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}}$$

Ahol egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $MA = 2 \cdot MA'$, azaz $MA = MA_1$. Vagyis, ha az M magasságpont éppen az ABC háromszög köré írható körének a középpontja. Ebből viszont az következik, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú.

Ezt fogjuk alkalmazni háromszor.

$$AA_1^n \cdot \sin 2\alpha + BB_1^n \cdot \sin 2\beta + CC_1^n \sin 2\gamma \geq$$
$$\geq 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin 2\alpha + 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}} \cdot$$
$$\cdot \sin 2\beta + 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin 2\gamma =$$
$$= 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

Alkalmazzuk a 7. lemmát és így:

$$AA_1^n \cdot \sin 2\alpha + BB_1^n \cdot \sin 2\beta + CC_1^n \sin 2\gamma \geq$$
$$\geq 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}} \cdot 4 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma =$$
$$= 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \rho \cdot 4 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma =$$

(Most pedig 6. lemmát alkalmazzuk.)

$$= 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \rho \cdot K_0 =$$

(De $\rho \cdot K_0 = 2 \cdot T_0$)

$$= 4^n \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2 \cdot T_0 = 2^{2n+1} \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}-1} \cdot T_0.$$

Vagyis igazoltuk, hogy tetszőleges pozitív egész n-re fennáll, hogy:

$$AA_1^n \cdot \sin 2\alpha + BB_1^n \cdot \sin 2\beta + CC_1^n \cdot \sin 2\gamma \geq$$

$$\geq 2^{2n+1} \cdot (R \cdot \rho)^{\frac{n}{2}-1} \cdot T_0.$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az ABC háromszög szabályos.

V. További fejlemények

2000 júliusában e témát volt szerencsém előadni a Rátz László Vándorgyűlésen, az előadások a Szegedi Tudományegyetem termeiben zajlottak.

Az érdeklődő Olvasók maguk is könnyen levezethetik e lemmákat vagy utánanézhetnek a megadott szakirodalomban. A KöMal CD használata gyorsíthatja a keresgélést.

A közönség megtisztelte érdeklődésével e témát. Itt Arnhoffer Mihály tanár úr (Veszprém, Lovassy László Gimnázium), Böcskey Ákos tanár úr (Veszprém, Lovassy László Gimnázium) és Dályai Pál Péter tanár úr (Szeged) új megoldásait emelem ki. Remélem, hogy egy-egy cikkben megírják érdekes megoldásaikat.

Irodalom és jegyzetek

[1] *Mathematics Magazine,* 67 (1994) No.5. (december) 384. old. 1460. probléma

[2] *Mathematics Magazine,* 68 (1995) No.5. (december) 401-403. old., az 1460. probléma megoldása egy markotabödögei lakos megoldása alapján. Megoldotta még: Con Amore Problem Group (Dánia), Miguel Amengual Covas (Spanyolország), Jiro Fukuta (Japán), Mostafa Ghandehari (USA), Nick Lord (Anglia) O. P. Lossers (Hollandia), Francisco Bellot Rosado (Spanyolország), Hoe Teck Wee (egyetemista, Szingapúr), Sammy és Jimmy Yu (egyetemisták, USA), David Zhu (USA), Doru Popescu Anastasiu (Szlatina, Romania)

[3] Tolnai Jenő (összeállító), *Érdekes matematikai gyakorló feladatok II. Geometria,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

Az 1. lemma a 343. a) feladat megoldásából következik.

A 2. lemma a 348. feladattal egyezik meg.

A 4. lemma a 40. oldal 7. tétele. Ezt nem bizonyítják a könyvben.

A 6. lemma a 342. feladattal egyezik meg.

A 7. lemma a 217. feladat *A* részével egyezik meg.

[4] Dr. Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos, *Matematika III.* (fakultatív „B" változat), Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[5] *KöMaL,* 1896. december, 53. oldalán kitűzve a 293*. feladat, megoldása *KöMaL,* 1897. március, 122-123. old. Itt két megoldást olvashatunk. Az egyiket Kornis Ödön, a másikat Visnya Aladár jegyzi. Összesen 19 diák küldte be a megoldását, köztük a későbbi világhírű magyar matematikusok, Fejér Lipót és Riesz Frigyes.

[6] Szabó Péter, Megjegyzések a talpponti háromszögről, *KöMaL,* 1902. január, 124-128. old., különösen a 124-125.

[7] *KöMaL,* 1897. november, 46-47. oldalon kitűzve, a 430. feladat első fele, kitűző „dz", megoldása *KöMaL,* 1898. március, 139. old. Itt Dénes Aladár megoldását olvashatjuk, a megoldók száma 27.

[8] *KöMaL,* 1896. január, 79. oldalon kitűzve, a 177. feladat első része, megoldása *KöMaL,* 1896. április, 107. oldal. Itt Friedmann Bernát megoldását olvashatjuk, 10-en oldották meg.

Dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde

A Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

A 2002–2003. tanévben 2002. november 14-én került megrendezésre a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny, a DE Matematikai és Informatikai Intézete és a Bolyai János Matematikai Társulat Hajdú-Bihar megyei Tagozatának a szervezésében. A verseny koordinátora dr. Lajkó Károly, a versenybizottság vezetője dr. Kántor Sándorné volt.

A versenyen 1000-nél több tanuló vett részt a megye középiskoláiból. Ebben a tanévben 3 kategóriában versenyeztek a tanulók: gimnázium, speciális matematika tagozat és szakközépiskola.

Az egyes évfolyamok feladatait a Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézetének a tanárai állították össze, felhasználva a Deli Lajos szaktanácsadó által beküldött feladatjavaslatokat is.

A feladatsorok összeállítói:

9. évfolyam: dr. Kovács András, 10. évfolyam: dr. Kántor Sándor, 11. évfolyam: dr. Páles Zsolt, 12. évfolyam: dr. Kántor Sándorné. A tanulóknak mindegyik évfolyamon 5 feladatból álló feladatsort kellett kidolgozniuk 3 óra alatt. Egy-egy feladatsor összpontszáma 60 volt.

A legnehezebbnek a 9. évfolyam feladatsora bizonyult a szokatlanabb megfogalmazás miatt, illetve a szakközépiskolások számára kissé nehéz volt a 12. évfolyam feladatsora. Maximális pontot ebben a tanévben senki sem ért el. Összességében 37 tanár 65 diákja ért el helyezést vagy kapott dicséretet.

A verseny eredményei:

(A következő rövidítéseket használjuk: TÁG: Tóth Árpád Gimnázium; DE Kossuth: Debreceni Egyetem Kossuth Gimnázium; Hszoboszló, Hőgyes: hajdúszoboszlói Hőegyes Endre Gimnázium; FMG: Fazekas Mihály Gimnázium Hböszörmény, Bocskai: hajdúböszörmény, Bocskai Gimnázium; Ref. Gimn.: Református Gimnázium)

9. osztály

Gimnáziumok: I. díj: Boross Péter (TÁG), II. díj: Karancsi János (DE Kossuth), III. díj: Dobos Péter (Hszoboszló, Hőgyes), Kovács Péter (DE Kossuth). Dicséret: Medvés Péter (Hszoboszló, Hőgyes), Piczil Fruzsina (TÁG), Vígh Viktória (Hszoboszló, Hőgyes).

Speciális matematika tagozat (FMG): I. díj: Farkas Csaba, Maleskovits Dávid, Trócsányi Miklós, II. díj: Kiss Judit.

Dicséret: Kertész Dávid, Polozun Valéria.

Szakközépiskolák: III. díj: Bessenyei Csilla (Mechwart).

Dicséret: Szabó István (Mechwart).

10. osztály

Gimnáziumok: I. díj: Szentjóbi Anna (Hszoboszló, Hőgyes), II. díj: Fábi László (Dóczy), III. díj: Láda Erika, Sóvágó Sándor (Hböszörmény, Bocskai), Víg Róbert (TÁG).

Dicséret: Aradi Bernadett (DE Kossuth), Kovács Máté (FMG), Kozma Gabriella (Svetits), Tibori Tamás Tibold (DE Kossuth).

Speciális matematikai tagozat (FMG): I. díj: Bardóczi Ádám, Kolbe Balázs, II: díj: Krusper

Márta, III. díj: Tőkési Gergely, dicséret: Ruskó Péter.

Szakközépiskolák: III. díj: Madar Zoltán (Mechwart SZKI).

Dicséret: Incze Antal, Kiss Gergely (Mechwart).

11. osztály

Gimnáziumok: I. díj: Egri Attila (Hszoboszló, Hőgyes), II. díj: Balogh Tamás, Sum Zsuzsanna (DE Kossuth), III. díj: Császi Attila (Hböszörmény, Bocskai), Szilágyi Péter (DE Kossuth).

Dicséret: Szűcs István (DE Kossuth), Vadon Györgyi (TÁG).

Speciális matematikai tagozat (FMG): I. díj: Dányádi Zsolt, Papp Gábor, Tuska Gábor.

Dicséret: Dezső Dóra, Katona András, Nagy Ábris.

Szakközépiskolák: I. díj: Bényei Antal (Gábor D. SZKI), II. díj: Nagy Norbert (Mechwart SZKI).

Dicséret: Ádám Anna (Bethlen G. SZKI), Ormos Béla, Péter Miklós (Mechwart SZKI).

12. osztály

Gimnáziumok: I. díj: Sántha Katalin (Hböszörmény, Bocskai), II. díj: Nádasi Levente, Sepsi Örs (Ref. Gimn.), Zabos Erika (Hböszörmény, Bocskai).

Dicséret: Illés József, Krusper Balázs (TÁG), Minárik Péter (Pladány, Karacs), Tóth Erzsébet (TÁG), Uzonyi Béla (Hböszörmény, Bocskai).

Speciális matematikai tagozat (FMG): I. díj: Csóka Endre, II. díj: Kormos Attila.

Dicséret: Nagy András.

Szakközépiskolák: dicséret: Dobos András (Hszoboszló, Közgazd. SZKI), Löki Levente (Mechwart SZKI), Nagy Erika (Bethlen G. SZKI).

A versenyen kitűzött feladatok

9. osztály

1. Egy sakktáblán 8 sorban és 8 oszlopban helyezhetjük el a bábukat, azaz a táblán 64 négyzet alakú mező van. Valójában hány olyan négyzetet fedezhetünk fel a sakktáblán, amelynek oldalai a tábla széleivel párhuzamosak?

8 pont

2. Négy szobor egy paralelogramma csúcsaiban helyezkedik el: a szemközti szobrok távolsága 30 m, illetve 90 m. Hogyan lehet megtervezni egy 2 m széles körgyűrű alakú utat, ha azt akarjuk, hogy ez mind a négy szobortól egyenlő távolságra haladjon? (A körgyűrű és a paralelogramma középpontja egybeesik). Hány köbméter kavicsot kell az út létrehozásához felhasználni, ha a kavicsot 5 cm vastagon terítjük szét a földön?

10 pont

3. Tekintsük az A halmaz összes részhalmazát. Adjuk össze a bennük lévő számokat különkülön, majd képezzük ezeknek is az összegét. Milyen értéket kapunk, ha tudjuk, hogy az alábbi két halmaz egyenlő:

$$A = \{x - 237;\ 7x + 5y - 637;\ 5x - 7z + 943\}$$
$$B = \{x + 237;\ 501 + x;\ 3x + 729\}.$$

(x, y, z racionális számok.)

12 pont

4. Egy vonat, amely Debrecenből Budapestre megy, útközben pályafelújítás miatt kénytelen sebességét az n-ed részére csökkenteni; ezáltal a órát késik. Ha a munkálatok Debrecenhez b kilométerrel közelebb kezdődnének, a késés c óra lenne. Hány kilométert tett meg eredetileg a vonat óránként?

14 pont

5. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a $\sqrt{x} + |x| - [x] = 0$ egyenletet. ($[x]$ az x szám egészrészét, azaz azt a legnagyobb egész számot jelöli, amely nem nagyobb az x számnál. Például $[1, 2] = 1$).

16 pont

10. osztály

1. Legyen egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 12, szárának hossza 10. Ebbe a háromszögbe egy félkört írtunk úgy, hogy a félkört határoló átmérő a háromszög alapján van, a határoló félkörív érinti a szárakat. Mennyi a félkör átmérője?

8 pont

2. Én kétszer annyi idős vagyok, mint a barátom volt akkor, amikor én annyi idős voltam, mint a barátom most. Amikor a barátom annyi idős lesz, mint én vagyok most, akkor együtt 63 évesek leszünk. Mennyi idős vagyok, és mennyi a barátom?

10 pont

3. Hány pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár elégíti ki az $x^2 - y^2 = 2002$ egyenletet?

12 pont

4. Egy konvex négyszöget átlói négy olyan háromszögre darabolnak, hogy mindegyik területének mérőszáma egész szám. Lehet-e ezek közül három szám 2001, 2002 és 2003?

14 pont

5. Adott a síkon 2002 különböző pont úgy, hogy bármelyik négy között van három olyan, amelyik egy egyenesre illeszkedik. Bizonyítsa be, hogy van olyan egyenes a síkban, amelyre az adott pontok közül legalább 2001 illeszkedik!

16 pont

11. osztály

1. Egy trapéz középvonalának, magasságának és átlóinak hossza rendre k, m, e és f. Igazoljuk, hogy $ef \geq 2mk$. Mikor állhat fenn egyenlőség?

8 pont

2. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{2}{3}} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{\frac{9}{10}} x} = 1$$

egyenletet a valós számok halmazán.

10 pont

3. Számítsuk ki az $S_{2002} = a_1 + \ldots + a_{2002}$ összeget, ha

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

12 pont

4. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csupa egyesekből áll, és amely osztható 63-mal.

14 pont

5. Adott 100 db téglalap úgy, hogy bármely kettőnek van közös pontja és a téglalapok oldalai párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel. Igazoljuk, hogy a téglalapoknak van közös pontja.

16 pont

12. osztály

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$|\cos x| \cos x \leq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget!

8 pont

2. Határozza meg a p valós paraméter értékeit úgy, hogy

a) az $x \mapsto px^2 - 2x + p + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomfüggvény legnagyobb értéke 1 legyen,

b) az $x \mapsto px^2 - 2x + p + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomfüggvény legkisebb értéke –1 legyen. Mindkét esetben adja meg a szélsőérték helyét is!

10 pont

3. Adott az O_1 középpontú R_1 sugarú k_1 kör és az O_2 középpontú R_2 sugarú k_2 kör, amelyek egymást kívülről érintik. Vegye fel az O_1O_2 szakasz fölé a k_3 Thalész kört, és azt az r sugarú k kört, amely a k_1 kört is és a k_2 kört is kívülről, a k_3 kört belülről érinti.

a) Fejezze ki a k és k_3 körök r és R sugarát az R_1 és R_2 sugarak segítségével.

b) Bizonyítsa be, hogy $8r \leq R_1 + R_2$.

13 pont

4. Bizonyítsa be, hogy akárhány különböző pozitív egész szám négyzete reciprokainak összege kisebb 2-nél!

14 pont

5. Az *ABCDM* négyoldalú gúla alaplapja olyan trapéz, amelyben

$$\frac{1}{2}AD = AB = BC = CD = a.$$

A gúla magasságának talppontja a trapéz átlóinak *O* metszéspontjában van. A gúla *AM* és *CM* oldalélei merőlegesek egymásra. Mekkora a gúla térfogata és felszíne?

15 pont

Megoldások

9. osztály

1. A sakktáblán felfedezhető négyzetek oldalai 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 vagy 8 egység hosszúak lehetnek.

2 pont

Belátható, hogy az 1 egység oldalú négyzetekből 64, a 2 oldalúakból 49, a 3 oldalúakból 36, a 4 oldalúakból 25, az 5 oldalúakból 16, a 6 oldalúakból 9, a 7 oldalúakból 4, a 8 oldalúakból 1 található.

4 pont

Együttes számuk: $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$.

2 pont

Összesen: 8 pont

2. Egyszerűen belátható, hogy a középkör átmérője a 30 és a 90 m-es távolságok számtani közepe, 60 m.

2 pont

Az út így egy olyan körgyűrű lesz, amelynél a határoló körök sugarai $R = 31$ m, $r = 29$ m.

2 pont

A körgyűrű területe:
$T = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi \approx 31^2 \cdot \pi - 29^2 \cdot \pi \approx 377\ \text{m}^2$.

3 pont

Az 5 cm-es vastagság eléréshez $377 \cdot 0{,}05 = 18{,}85\ \text{m}^3$ kavicsot kell szétteríteni.

3 pont

Összesen 10 pont

3. Két halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha elemei ugyanazok.

1 pont

Az *A* halmaz $x - 237$ eleme csak a *B* halmaz $3x + 729$ elemével lehet egyenlő, mivel a többi eset ellentmondó egyenletekhez vezet.

2 pont

Az $x - 273 = 3x + 729$ egyenletből $x = -483$. Így az *A* halmaz első, a *B* harmadik eleme $-483 - 237 = -720$.

2 pont

A *B* halmaz további elemei $-483 + 237 = -246$ és $501 - 483 = 18$.

2 pont

Az *A* halmaz elemei is ugyanezekkel a számokkal egyenlők. Belátható, hogy létezik y és z racionális szám, hogy vagy az *A* második eleme – 246, a harmadik 18, vagy az *A* má-

sodik eleme 18, a harmadik – 246.

2 pont

Az $\{a; b; c\}$ háromelemű halmaz részhalmazai: $0, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}$. A részhalmazok elemeinek összege: $4(a + b + c)$.

2 pont

Emiatt a keresett összeg: $4(-246 + 18 - -720) = -3792$.

1 pont

Összesen: 12 pont

4. Jelöljük v-vel a vonat lassítás előtti sebességét. A $c - a$ menetidőkülönbség abból származik, hogy az első esetben még a b km utat is v sebességgel tenné meg a vonat, míg a második esetben v/n sebességgel halad az út ezen részén.

5 pont

A b km út megtételéhez szükséges idő az első esetben $t_1 = \frac{b}{v}$,

2 pont

a második esetben: $t_2 = b : \frac{v}{n} = \frac{nb}{v}$.

3 pont

Emiatt $c - a = \frac{nb}{v} - \frac{b}{v}$,

2 pont

és innen $v = \frac{(n-1) \cdot b}{c-a}$.

2 pont

Összesen: 14 pont

5. Az egyenletnek a nemnegatív racionális számok halmazán van értelme, mert a négyzetgyök függvény csak ekkor értelmezett.

2 pont

Ha $x \geq 0$, akkor $|x| = x$, így az egyenletet az

2 pont

$\sqrt{x} + x = [x]$ alakba is írhatjuk.

2 pont

Az egészrész definíciójából $x \geq [x]$ következik, ami $\sqrt{x} \geq 0$ miatt adja, hogy $\sqrt{x} + x \geq [x]$,

2 pont

és egyenlőség már nem teljesülhet, ha $\sqrt{x} > 0$, illetve $x > 0$. Így az egyenletnek pozitív gyöke nem lehet.

4 pont

Az $x = 0$ szám racionális, és kielégíti az egyenletet.

2 pont

Az egyenletnek az előzőek miatt más racionális gyöke nem lehet.

2 pont

Összesen: 16 pont

10. osztály

1. Legyen a félkör átmérőjének hossza $2r$, a háromszög magasságának hossza m. A háromszög területe kétféleképpen számolva: $6m = 10r$.

4 pont

Pitagorasz tétele alapján: $10^2 = 6^2 + m^2$.

2 pont

A két egyenletből: $r = \frac{3}{5}\sqrt{10^2 - 6^2} = 4{,}8$.

Összesen 8 pont

2. Most én x, a barátom y éves, ahol $x > y$.

1 pont

Én $x - y$ évvel ezelőtt voltam annyi idős, mint a barátom most. Ekkor a barátom $y - (x - y)$ éves volt, tehát $x = 2[y - (x - y)]$.

4 pont

A barátom $x - y$ év múlva lesz annyi idős, mint én most. Ekkor én $x + (x - y)$ éves leszek, tehát $x + (x - y) + x = 63$.

2 pont

A két egyenletből álló egyenletrendszer: $3x - 4y = 0$; $3x - y = 63$.

2 pont

Ennek megoldása $x = 28$ és $y = 21$, ami valóban megoldása a feladatnak.

1 pont

Összesen 10 pont

3. Nyilvánvaló, hogy ha x és y mindegyike páros, vagy mindegyike páratlan, akkor $x^2 - y^2 =$

$= (x + y)(x - y)$ osztható 4-gyel.

6 pont

Ha x és y egyike páros és a másik páratlan, akkor $x^2 - y^2$ páratlan.

4 pont

2002 nem osztható 4-gyel és nem páratlan, ezért nincs az egyenletet kielégítő, pozitív egész számokból álló számpár.

2 pont

Összesen 12 pont

4. A háromszögek területét az átfogókra eső alapjuk és a hozzátartozó magasság szorzatának feleként kiszámolva belátható, hogy a nemszomszédos háromszögek területének szorzata egyenlő.

4 pont

Tehát ha lenne a feltételnek megfelelő négyszög, akkor a 2001, 2002, 2003 számok közül kettőnek a szorzatát a harmadikkal osztva egész számot kellene kapni.

4 pont

Ez egyetlen kombinációban sem áll elő.

4 pont

Tehát a három szám nem lehet a három terület.

2 pont

Összesen: 14 pont

5. Válasszunk ki az adott pontok közül négyet. Ezek közül A, B, C az e egyenesre illeszkedik. Indirekt módszerrel bizonyítjuk, hogy nincs az adott pontok között két olyan, amelyik nem illeszkedik az e egyenesre, tehát az adott pontok közül legalább 2001 az e egyenesre illeszkedik.

Ha az adott pontok közül K és L nem illeszkedik az e egyenesre, akkor a K, L, A, B pontok közül egy egyenesre illeszkedő ponthármas csak K, L, A vagy K, L, B lehet, mert az AB egyenesre nem illeszkedik sem K sem L. Az első esetben a KL egyenes nem halad át sem B-n sem C-n, pedig a K, L, B, C pontnégyes tulajdonsága az egyiket megkívánná. A második esetben a KL egyenes nem halad át sem A-n sem C-n, pedig a K, L, A, C pontnégyes tulajdonsága az egyiket megkívánná.

8 pont

Összesen: 16 pont

11. osztály

1. A trapéz területe egyrészt $T = mk$.

2 pont

Másrészt $T = \frac{ef \sin\varphi}{2}$, ahol φ az átlók által bezárt szög.

2 pont

Így $\sin\varphi \le 1$ miatt $ef \ge 2T = 2mk$, ami adja az állítást.

2 pont

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\sin\varphi = 1$, azaz ha $\varphi = 90°$.

2 pont

Összesen: 8 pont

2. Az $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $(a > 0, b > 0; a \ne 1, b \ne 1)$ azonosság szerint

2 pont

$$1 = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x)} + \frac{1}{\log_{\frac{2}{3}}(x)} + \ldots + \frac{1}{\log_{\frac{9}{10}}(x)} =$$

$$= \log_x \frac{1}{2} + \ldots + \log_x \frac{9}{10} =$$

$$= \log_x \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10}\right) = \log_x \frac{1}{10} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{10}} x},$$

ha $x > 0$ és $x \ne 1$.

4 pont

Az $\log_{\frac{1}{10}} x = 1$ egyenlet megoldása $x = \frac{1}{10}$

2 pont

és ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

2 pont

Összesen: 10 pont

3.

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

4 pont

miatt

$$S_{2002} = \sum_{n=1}^{2002}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{2002}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 2\sum_{n=1}^{2002}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003}\right] -$$

$$-2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004}\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{2003} - 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2004}\right] = \frac{2}{2004} - \frac{1}{2003} = \frac{1001}{1002 \cdot 2003}.$$

5 pont

Összesen: 12 pont

4. Legyen a keresett szám n-jegyű. Mivel $63 = 9 \cdot 7$, ezért ez a szám csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege – ami éppen n – osztható 9-cel, ezért $n = 9k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú.

3 pont

Ekkor $x = 11...11 = 111\,111\,111 \cdot (10^{9(k-1)} + \ldots + 10^9 + 1)$.

3 pont

Egyszerűen kapjuk, hogy 111 111 111 nem osztható 7-tel. Így olyan k-t kell keresnünk, amelyre $10^{9(k-1)} + \ldots + 10^9 + 1$ osztható 7-tel.

3 pont

Belátható, hogy 10^9 maradéka 7-tel osztva 6, ezért $10^9 + 1$ osztható 7-tel, tehát 2 a k legkisebb lehetséges értéke.

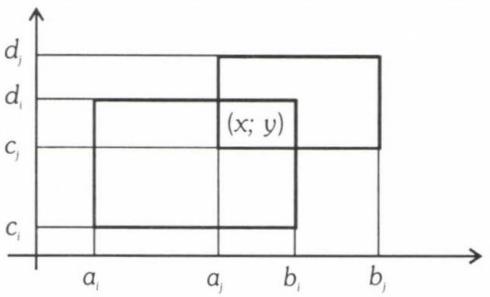
3 pont

Emiatt a keresett szám 111 111 111 ($10^9 + 1$), amely 18 db 1-esből áll.

2 pont

Összesen: 14 pont

5. Legyen az i-edik és j-edik téglalap a következőképpen megadva.



3 pont

Ha $(x; y)$ az i-edik és j-edik téglalap közös pontja, akkor $a_i \le x \le b_i$, $a_j \le x \le b_j$ és $c_i \le y \le d_i$, $c_j \le y \le d_j$.

4 pont

Így $a_i \le b_j$ és $c_i \le d_j$ minden $(i; j)$ párra.

3 pont

Ezért $\max a_i \le \min b_j$ és $\max c_i \le \min d_j$.

3 pont

Tehát az $x_0 = \max a_i$, $y_0 = \max c_i$ koordinátájú pont a téglalapok közös pontja lesz.

3 pont

Összesen: 16 pont

12. osztály

1. Esetszétválasztást végzünk.

a) Ha $\cos x < 0$, akkor $a - \cos^2 x \le \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség mindig igaz, vagyis

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3 pont

b) Ha $\cos x \ge 0$, akkor

$$\cos^2 x \le \frac{1}{2},$$

amiből a feltétel miatt

$$0 \le \cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2},$$

vagyis

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z},$$

vagy

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4 pont

Összefoglalva:

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

a megoldás.

1 pont

Összesen: 8 pont

2. 1) Ha $p = 0$, akkor $P(x) = px^2 - 2x + p + 1 = -2x + 1$ lineáris függvény, amelynek nincs sem minimuma, sem maximuma.

1 pont

2) Ha $p \neq 0$, akkor $P(x)$ másodfokú függvény, és teljes négyzetté kiegészítéssel kapjuk, hogy

$$P(x) = p\left(x-\frac{1}{p}\right)^2 + \frac{p^2+p-1}{p}.$$

1 pont

a) Ha $p < 0$, akkor $P(x)$-nek az $x = \frac{1}{p}$ helyen van maximuma, és

$$\frac{p^2+p-1}{p} = 1,$$

amiből $p^2 = 1$.

A $p < 0$ feltétel miatt $p = -1$ a megfelelő érték, ekkor $x = -1$.

4 pont

b) Ha $p > 0$, akkor $P(x)$-nek az $x = \frac{1}{p}$ helyen van minimuma, és

$$\frac{p^2+p-1}{p} = -1,$$

vagyis $p^2 + 2p - 1 = 0$, amiből $p_{1;2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

A $p > 0$ feltétel miatt $p = \sqrt{2} - 1$ a megfelelő érték, ekkor $x = \sqrt{2} + 1$.

4 pont

Összesen: 10 pont

3. *a)* A k_3 kör sugara: $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$.

1 pont

Felhasználjuk az ábra jelöléseit.

$O_1O = R_1 + r$, $O_2O = R_2 + r$.

Felírjuk a koszinusz tételt az O_1O_3O és O_3O_2O háromszögekre:

$$(R_1 + r)^2 = R^2 + (R - r)^2 - 2R(R - r)\cos(180^\circ - \alpha)$$

3 pont

$$(R_2 + r)^2 = R^2 + (R - r)^2 - 2R(R - r)\cos\alpha.$$

3 pont

Innen

$$(R_1 + r)^2 + (R_2 + r)^2 = 2R^2 + 2(R - r)^2; \quad r = \frac{R_1R_2}{2(R_1 + R_2)}.$$

4 pont

b) Felhasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\sqrt{R_1R_2} \le \frac{R_1 + R_2}{2}, r \le \frac{R_1 + R_2}{8},$$

tehát $8r \le R_1 + R_2$.

2 pont

Összesen: 13 pont

4. Legyen $1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Nyilvánvaló, hogy $k \le x_k$ $(\forall k \in \mathbb{N}^+)$ így

$$\frac{1}{x_k^2} \le \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

ahol $k > 1$.

7 pont

Ezért

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} \le \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

7 pont

Összesen: 14 pont

5. A trapéz két alapja: $AD = 2a$, $BC = a$; $AB = CD = a$ miatt a trapéz egyenlő szárú.

1 pont

Jelölje E a trapéz AB és CD szárai meghosszabbításának metszéspontját. $AD \,||\, BC$,

$$CB = \frac{1}{2}AD$$

miatt az AED háromszög szabályos, és oldalainak hossza $2a$, magassága $a\sqrt{3}$.

$BEC\triangle \sim AED\triangle$ a szögek egyenlősége miatt. A hasonlóság aránya 1 : 2. Így

$$T_{ABCD} = \frac{3}{4} T_{ADE} = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}.$$

4 pont

Az O pont az $ADE\triangle$ súlypontja, ezért

$$AO = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

1-1 pont

Mivel az AMC háromszög derékszögű, ezért az arányossági tételek alapján

$$AM = a\sqrt{2},\ CM = a,\ MO = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

1-1-1 pont

$$V_g = \frac{1}{3} T_{ABCD} \cdot MO = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$

1 pont

A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az AMD, ABM, CDM háromszögek derékszögűek, illetve a BCM háromszög egyenlő oldalú.

Így $A_g = T_{ABCD} + T_{ADM} + 2T_{ABM} + T_{BCM} =$

$$= \frac{3}{4} a^2\sqrt{3} + a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} a^2\sqrt{3} = a^2(\sqrt{3} + 2).$$

4 pont

Összesen: 15 pont

Dr. Urbán János

Beszámoló a XII. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A XII. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt 2003. április 15-19-ig **Eger**ben, a Szilágyi Erzsébet Gimnáziumban rendezték meg. A házigazdák **Bíró Bálint** főszervező vezetésével mindent elkövettek, hogy a szokásokhoz híven kellemes, otthonos légkört, ideális feltételeket teremtsenek a közel 300 vendég, versenyzők és kísérő tanárok számára.

Az április 16-i ünnepélyes megnyitót az Eszterházy Károly Főiskola dísztermében tartották, délután szakmai előadásokat hallgattak meg a résztvevők. Este a Gárdonyi Géza Színházban Shakespeare Ahogy tetszik című színjátékát nézhették meg a vendégek.

A négyórás verseny április 17-én délelőtt zajlott le, délután a bírálóbizottság dr. Mátyás Ferenc főiskolai tanár, a főiskola rektorhelyettesének irányításával kijavította a dolgozatokat.

Április 18-án egész napos kiránduláson ismerkedhettek a részt vevők Magyarország nevezetességeivel a Bükkben és a Mátrában.

Április 19-én, szombaton került sor az ünnepélyes eredményhirdetésre.

Az egyes évfolyamok versenyében a díjazottak a következők voltak:

9. osztály

I. díjasok: Paulin Roland, Budapest, Fazekas M. Gimn., Németh Zsolt, Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., Maleskovics Dávid, Debrecen, Fazekas M. Gimn.

II. díjasok: Nikházy László, Győr, Kazinczy F. Gimn., Katz Krisztián, Révkomárom, Selye J. Gimn., Csorba János, Győr, Apor Vilmos Iskolaközpont, Jankó Zsuzsanna, Szeged, Radnóti M. Gimn.

III. díjasok: Estélyi István, Galánta, Kodály Z. Gimn., Salamon László, Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., Urbin Ágnes, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.

10. osztály

I. díjasok: Czank Tamás, Miskolc, Földes F. Gimn., Király Csaba, Budapest, Fazekas M. Gimn.

II. díjasok: Széles Ádám, Csíkszereda, Márton Áron Középiskola, Stippinger Marcell, Sopron, Széchenyi I. Gimn.

III. díjasok: Bodnár József, Fülek, Gimn., Koreck Péter, Szeged, Radnóti M. Gimn., Földes Zsolt, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Kollégium, Petényi Franciska, Vác, Boronkay Gy. Műszaki Középiskola.

11. osztály

I. díjasok: Kórus Péter, Szeged, Radnóti M. Gimn., Egri Attila, Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., Zanaty Péter, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.

II. díjasok: Doba Viktor, Arad, Csiky Gergely Középiskola, Kramarics Áron, Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn.

III. díjasok: Hegyháti Máté, Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., Szabó Áron, Debrecen, Fazekas M. Gimn., Nedeczky Gábor, Kaposvár, Táncsics M. Gimn., Birkus Róbert, Galánta, Kodály Z. Gimn.

12. osztály

I. díjasok: Nagy Gábor, Kaposvár, Táncsics M. Gimn., Bergmann Gábor, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.

II. díjasok: Sípos Kinga, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Kollégium, Bíró Zoltán, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Kollégium

III. díjasok: Backhausz Ágnes, Budapest, Fazekas M. Gimn., Pintér Balázs, Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, Perini Alpár, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Gimn.

A versenyen kitűzött feladatok:

9. évfolyam

1. Az idén, tehát 2003-ban felhívott telefonon egykori matematikatanárom és egészségi állapotára panaszkodott. Kissé udvariatlanul megkérdeztem, hogy hány éves? Erre a következőt válaszolta:

– Ha azt az évszámot, amelyben 43 éves voltam, megszorzom azzal az évszámmal, amelyben 45 éves voltam, majd a szorzatot elosztom a születési évszámommal, akkor megkapom azt az évszámot, amelyben...

Ekkor megszakadt a vonal, és sokáig nem tudtam újrahívni. Szerencsére a fent közölt adatokból ki tudtam számolni, hogy melyik évben született. Vajon hány éves most egykori tanárom?

(Katz Sándor, Bonyhád)

2. Oldjuk meg az $x + 2y = 4$ és $2xy - 3z^2 = 4$ egyenletekből álló egyenletrendszert, ha x, y és z valós számok!

(Oláh György, Komárom)

3. Az asztalon fekszik néhány kupac kavics. Egy „lépés" jelentse azt, hogy kiválasztunk egy legalább háromelemű kupacot, egy darabot elveszünk, a maradékot pedig két, nem feltétlenül egyforma kisebb kupacra osztjuk.

El lehet-e érni, hogy néhány lépés után minden kupacban 3 darab kavics legyen, ha kezdetben egyetlen, 2001 kavicsot tartalmazó kupac volt az asztalon?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

4. Az $ABCD$ trapéz AB alapjára, mint átmérőre írt kör érinti a CD alapot és felezi az AD és BC szárakat.

Mekkorák a trapéz szögei?

(Katz Sándor, Bonyhád)

5. Határozzuk meg az n egész szám értékeit, melyekre

$$\left\{\frac{n^2+n+1}{6}\right\}+\left\{\frac{n}{2}\right\}=\left[\frac{2n}{n+6}\right]!$$

($[x]$ az x szám egész része, tehát az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb, míg $\{x\} = x - [x]$, vagyis $\{x\}$ az x szám törtrésze)

(Kacsó Ferenc, Marosvásárhely)

6. Egy bogár a 12 m oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet AB oldalának B-hez közelebb eső harmadolópontjából kiindulva az AB oldal A-hoz legközelebb eső hatodolópontjába mászik úgy, hogy közben egy-egy pontban érinti a BC, CD és DA oldalakat ebben a sorrendben.

Legalább mekkora utat tesz meg a bogár?

(Némethy Katalin, Budapest)

10. évfolyam

1. Határozzuk meg az a és b egész számokat, amelyekre az

$$x^2 - ax + 2a + b^2 = 0$$

egyenlet gyökei közvetlenül egymás utáni természetes számok!

(Kacsó Ferenc, Marosvásárhely)

2. Az AB és CD egy O középpontú körnek két, egymásra merőleges átmérője. Az OD szakaszt felező E ponton halad át az AF húr, az AE és CF szakaszok metszéspontja G. Bizonyítsuk be, hogy

a) $OB = 3 \cdot OG$

b) $CF = 3 \cdot DF$!

(Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

3. Bizonyítsuk be, hogy a $3^{2000} + 4$ szám pozitív osztóinak száma összetett szám!

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ sorozat bármely három szomszédos tagjának összege 5, 6, 7 vagy 8. Hány különböző értéke lehet az $a_{16} - a_7$ különbségnek?

(Szabó Magdolna, Szabadka)

5. Melyek azok a szabályos sokszögek, amelyek hézag és átfedés nélkül összerakhatók más, ugyanolyan oldalhosszúságú szabályos sokszögekből?

(Bogdán Zoltán, Cegléd)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha p pozitív prímszám, akkor

$$\sqrt{p \cdot (p+1)} + \sqrt{(p+1) \cdot (p+3)} + \\ + \sqrt{p \cdot (p+5)} + \sqrt{(p+3) \cdot (p+5)}$$

irracionális szám!

(Bencze Mihály, Brassó)

11. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy a 23, 203, 2003, 20003,... sorozatban végtelen sok 7-tel osztható szám van!

(Benedek Ilona, Budapest)

2. Milyen tulajdonságú az a háromszög, amelynek a és b oldala és a harmadik oldalhoz tartozó f_c szögfelezője között az

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_c}$$

összefüggés érvényes?

(Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\log_3(2^x + 5) = \log_2(3^x - 5)$$ egyenletet!

(Orbán Edit, Zalaegerszeg)

4. Az $ABCD$ paralelogrammában A-nál hegyesszög van. Rajzoljunk a BC és CD oldalak, mint átmérők fölé köröket és az A pontból húzzunk érintőket ezekhez a körökhöz, az érintési pontok legyenek E és F. Bizonyítsuk be, hogy az AC, AE és AF szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető!

(Balogh János, Kaposvár)

5. Melyik az a legkisebb p pozitív prímszám, amelyre az

$$\frac{x^2 - 2x - 13}{\sqrt{x^2 - 2x - 14}} = 2 \cdot \sin\frac{\pi \cdot x + p \cdot \pi}{4}$$

egyenletnek van olyan pozitív egész megoldása, hogy $x \le p$ teljesül?

(Bíró Bálint, Eger)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $1 \le x_1 \le 2$, $1 \le x_2 \le 2$, ..., $1 \le x_n \le 2$, akkor

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1 + \frac{2}{x_n}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2 + \frac{2}{x_{n-1}}} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n + \frac{2}{x_1}} \ge \frac{n}{8}!$$

(Kacsó Ferenc, Marosvásárhely)

12. évfolyam

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$6 \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 + 11} = \sqrt{\frac{11x - 6}{6 - x}}$$

egyenletet!

(Kubatov Antal, Kaposvár)

2. Az $f(x)$ függvényre tetszőleges valós x szám esetén teljesül, hogy $2 \cdot f(x) + f(1-x) = x^2$.

Milyen n pozitív egész számra igaz, hogy $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 19n$?

(Némethy Katalin, Budapest)

3. Az x_n sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \text{ és } x_{k+1} = x_k^2 + x_k.$$

Határozzuk meg az

$$S_{100} = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{100} + 1}$$

összeg egész részét!

(Kántor Sándorné, Debrecen)

4. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak a BC, CA és AB oldalakon levő talppontjai rendre T_1, T_2 és T_3, a háromszög magasságpontja M, körülírt és beírt körének sugara R és r. Bizonyítsuk be, hogy

$$MT_1 \cdot MT_2 \cdot MT_3 \leq \frac{R \cdot r^2}{2}!$$

(Bíró Bálint, Eger)

5. Határozzuk meg azokat az x, y valós számokat, amelyekre

$$x^{\log_3 y} + y^{\log_x 3} + 3^{\log_y x} = x + y + 3!$$

(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

6. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a

$$\sqrt{5 \cdot (x^2 + 2yz)} + \sqrt{6(y^2 + 2zx)} + \\ + \sqrt{5(z^2 + 2xy)} = 4(x + y + z)$$

egyenletet!

(Pintér Ferenc, Nagykanizsa)

A tanárképző főiskolák 2003. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

1. Hányféleképpen lehet az ötös lottón a 90 szám közül 5-öt megjelölni úgy, hogy ne legyenek köztük szomszédosak?

2. Az a valós paraméter mely értékeire van egyetlen olyan (x, y) valós számpár, amely kielégíti az $x^2 + y^2 - 4x + 2 \leq 0$ egyenlőtlenséget és az $x - y + a = 0$ egyenletet is?

3. Nevezzük szabályos *tér n-szögnek* a térbeli n-szöget, ha minden oldala egyenlő hosszúságú és a szomszédos oldalak ugyanakkora szöget zárnak be egymással. Milyen határok között változhat egy szabályos tér 4-szög egy szöge?

4. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2 + ac}.$$

5. Határozza meg az összes olyan (a, b) valós számpárt, amelyekre az

$$x^4 - 12x^3 + ax^2 + bx + 81 = 0$$

egyenletnek négy pozitív valós gyöke van!

6. Legyen (a_n) a következő sorozat:

$$a_1 = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + a_{n-1}} & \text{ha } a_{n-1} \neq -1, \\ -1 & \text{ha } a_{n-1} = -1 \end{cases}$$

ha $n > 1$, egész. Milyen c esetén konvergens a sorozat és mennyi a határértéke?

7. Adott a síkon 400 pont, amelyek közül semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy van olyan 100 darab páronként diszjunkt négyszög, amelyeknek éppen az adott pontok a csúcsai. (Diszjunktnak nevezünk két négyszöget, ha – mint zárt négyszöglapoknak – nincs közös pontjuk.)

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2004. január 31.

235. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét az

$$x^3 - px^2 + 54x - (5p + 7) = 0$$

egyenletben, ha tudjuk, hogy az egyenlet gyökei pozitív egészek, és az egyik gyök a másik kettő harmonikus közepe!

Fitos László, Esztergom

236. Mutassuk meg, hogy az $x^2 = y^3 + z^5$ egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldása van!

237. Az ABC háromszög súlypontja S. Jelölje a CAS szöget α, a CBS szöget β. Mutassuk meg, hogy ha az ASC háromszög körülírt köre érinti az AB egyenest, akkor

$$\sin\alpha + \sin\beta \le \frac{2}{\sqrt{3}}!$$

238. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ sor összege irracionális szám!

239. Valamely pozitív egész n esetén jelölje $p(n)$ azt a legnagyobb nem negatív egész k számot, amelyre 2^k osztója n-nek. Rekurzív módon definiáljuk a következő számokat:

$$x_0 = \frac{1}{2003},$$

és ha $x_{n-1} \neq 1 + 2p(n)$, akkor

$$x_n = \frac{1}{1 + 2p(n) - x_{n-1}}.$$

Hány szám definiálható a leírt módon?

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások

(210., 220-224. feladatok)

210. Határozzuk meg mindazokat az x, y, z pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy y prím és nem osztója z-nek, valamint 3 sem osztója z-nek, és $x^3 - y^3 = z^2$.

Megoldás: Alakítsuk az egyenlet bal oldalát:

$$x^3 - y^3 = (x - y)((x - y)^2 + 3xy).$$

A feltételek alapján $x - y$ és $(x - y)^2 + 3xy$ relatív prímek, ezért $x - y = u^2$ és $x^2 + xy + y^2 = v^2$, ahol u és v relatív prím pozitív egészek.

A fenti helyettesítéseket figyelembe véve kapjuk, hogy

$$3y^2 = 4v^2 - (2x + y)^2 =$$
$$= (2v - 2x - y)(2v + 2x + y).$$

Mivel y prím, ezért három esetet kell megvizsgálnunk.

1. $2v - 2x - y = y$ és $2v + 2x + y = 3y$.

Ekkor $x = 0$, ami a feltételek alapján nem lehetséges.

2. $2v - 2x - y = 1$ és $2v + 2x + y = 3y^2$.

Ekkor $3y^2 - 1 = 2(2x + y) = 2(2u^2 + 3y)$, ahonnan látszik, hogy 3 osztója az $(u^2 + 1)$-nek, ami nem lehetséges.

3. $2v - 2x - y = 3$ és $2v + 2x + y = y^2$.

Ekkor $y^2 - 3 = 2(2x + y) = 2(2u^2 + 3y)$, amiből adódik, hogy $(y - 3)^2 - (2u)^2 = 12$.

A feltételek figyelembe vételével adódik, hogy ennek az egyenletnek az egyetlen megoldása: $y = 7$, $u = 1$. Így $x = 8$, $z = 13$. Könnyen látható, hogy a (8, 7, 13) számhármas megfelel a feladat feltételének.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 5.

220. Bergengócia leghosszabb – nyílegyenes – utcájában az egyik oldalon 2003 ház van. Körétjük egymást nem metsző téglalap alakú kerítéseket építenek oly módon, hogy bármely kerítésen belül legyen legalább egy ház, és semelyik két kerítés ne tartalmazza ugyanazon házakat. Legfeljebb hány kerítést építhettek?

Kiss Sándor, Nyíregyháza

Megoldás: Belátjuk, hogy ha a házak száma n, akkor legfeljebb $2n - 1$ számú kerítés építhető a feladat feltételei mellett. Így az eredeti feladat megoldása: 4005.

Vegyük észre, hogy maximális kerítésszám esetén a kerítések között kell lennie egy olyannak, amely az összes házat (és az összes kerítést is) körbeveszi. Ennek megépítése ugyanis nem sérti egyik feltételt sem, a kerítésszámot viszont 1-gyel növeli. Meg kell építeni továbbá n darab olyan kerítést is, amely pontosan egy házat vesz körül, hiszen ezek sem sértik a feltételeket, hiányuk esetén viszont a kerítésszám növelhető. Így $n \geq 2$ esetén minden házat legalább két kerítés vesz körül.

Egy ház köré 1, két ház köré 3 kerítés építhető a feltételek teljesülése esetén, így $n = 1$ és $n = 2$ esetére az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $k \leq n$ esetén legfeljebb $2k - 1$ kerítés építhető. Tekintsünk $n + 1$ házat, amelyek maximális, m számú kerítéssel vannak körbevéve. Belátjuk, hogy

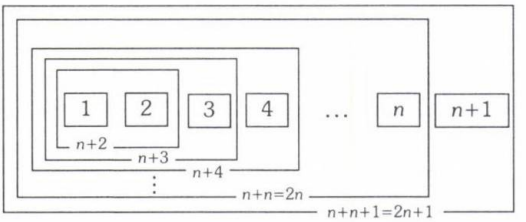
$$m = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1.$$

Hagyjuk el az összes házat tartalmazó kerítést. (A fentiek miatt ilyen van, és a feladat feltétele miatt csak egy ilyen van.) Így $m - 1$ kerítés marad, de olyan már nincs, amelyik minden házat bekerítene. A megmaradó kerítések közül tekintsünk egy olyat, amelyik a legtöbb házat veszi körbe. E kerítésen belül k_1, rajta kívül $k_2 = n + 1 - k_1$ ház van. Világos, hogy $1 \leq k_1 \leq n$ és $1 \leq k_2 \leq n$. A megmaradó kerítések mindegyike vagy a k_1 darab, vagy a k_2 darab ház közül kerít körbe néhányat. (Olyan kerítés nem lehet, amelyik innen is, onnan is tartalmaz házat, mert akkor lennének egymást metsző kerítések.) Az indukciós feltevés szerint a k_1 darab ház körül legfeljebb $2k_1 - 1$, a k_2 darab ház körül legfeljebb $2k_2 - 1$ darab kerítés építhető. Így a megmaradó kerítések számára nézve

$$m - 1 \leq 2k_1 - 1 + 2(n + 1 - k_1) - 1 = 2n,$$

ahonnan $m \leq 2n + 1$.

Az *1. ábrán* látható $n + 1$ házhoz $2n + 1$ megfelelő kerítés.



1. ábra

Dályay Pál Péter, Szeged
Kamarás Lajos, Pécs
Kiss Zoltán, Pécs
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 4.

221. Az ABC háromszög beírt körének a BC, CA és AB oldalakon levő érintési pontjai rendre A_1, B_1 és C_1. Tekintsük azt a téglatestet, amelynek egy csúcsból induló élei B_1C_1, C_1A_1 és A_1B_1. Jelöljük a téglatest térfogatát V-vel, felszínét F-fel, a $\frac{V}{F}$ arányt m-mel, az ABC háromszög kerületét K-val. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{K}{m} \geq 36.$$

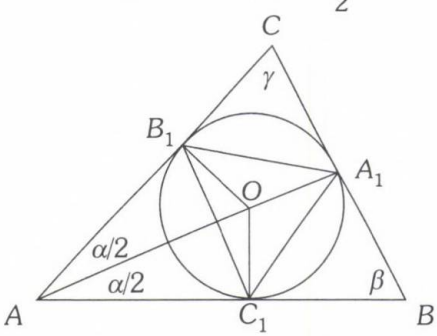
Mikor áll fenn egyenlőség?

Bíró Bálint, Eger

Megoldás: Legyenek az ABC háromszög szögei α, β, γ (*2. ábra*). Ekkor az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei rendre

$$90° - \frac{\alpha}{2},\ 90° - \frac{\beta}{2},\ 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

A számítások egyszerűsítése végett válasszuk az ABC háromszögbe írt kör sugarát $\frac{1}{2}$-nek.



2. ábra

Ekkor a szinusztétel, és a pótszögek szögfüggvényei közötti összefüggések alapján

$$B_1C_1 = \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$C_1A_1 = \sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\beta}{2},$$

$$A_1B_1 = \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}.$$

A *2. ábráról* leolvasható, hogy

$$AB_1 = AC_1 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad BC_1 = BA_1 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

$$CA_1 = CB_1 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ezeket felhasználva

$$\frac{K}{m} = \frac{K \cdot F}{V} =$$

$$= \frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot$$

$$\cdot 2 \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

A feltételek alapján a megfelelő trigonometrikus kifejezések minden tagja pozitív, így alkalmazható a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség:

$$\frac{K}{m} = \frac{3 \cdot \dfrac{\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \dfrac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}}{3}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot$$

$$\cdot 6 \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3} \geq$$

$$\geq \frac{18 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}} \cdot \sqrt[3]{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{18}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}}$$

Közismert (bizonyítása több helyen megtalálható), hogy

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Ezt felhasználva adódik, hogy

$$\frac{K}{m} \geq 36.$$

A fenti becslésekben egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

Csorba Ferenc, Győr
László Sándor, Szombathely

A megoldók száma: 9.

222. Csonkakúp alakú poharat színültig töltünk vízzel, majd óvatosan kiöntünk annyit, hogy a pohár feneke éppen kibukkanjon. (A megdöntött pohár feneke akkor bukkan ki, ha a víz felszínének síkja érinti a pohár alap-, illetve fedőkörét.) A pohárban ekkor az eredeti vízmennyiség 2/7 része van. Mekkora a pohár alap- és fedőköre átmérőjének aránya?

Rakonczai György, Budapest

Megoldás: A megadott arányból kiderül, hogy a csonkakúp fedőköre a nagyobb. Egészítsük ki a csonkakúpot kúppá, és használjuk a *3. ábra* jelöléseit.

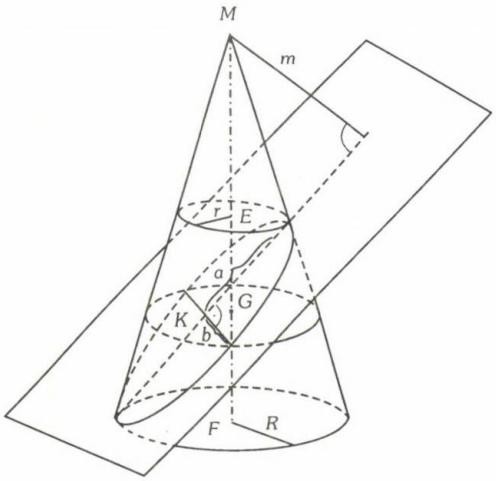
Vegyük azt a tengelymetszetet, amely a víz felszínének síkjára merőleges (*4. ábra*).

A víz felszínének síkja a kúpot ellipszisben metszi, ennek nagytengelye $AC = 2a$, középpontja K, fél kistengelyét jelölje b. Ha az alapkörök sugara R és r, a kúp félnyílásszöge α, a kúp M csúcsának az ellipszis síkjától vett távolsága m, akkor

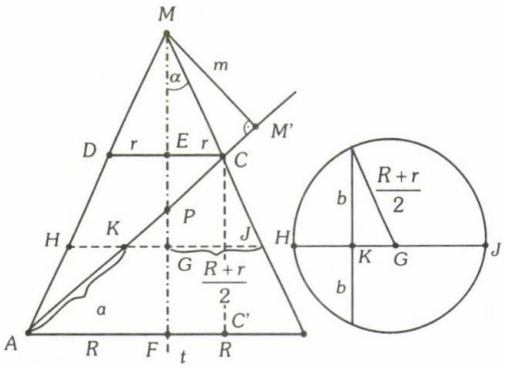
$$ME = r \cdot \operatorname{ctg}\alpha = c \cdot r, \quad MF = c \cdot R,$$
$$EF = c \cdot (R - r).$$

(A számítások rövidítése végett a $\operatorname{ctg}\alpha = c$ jelölést használjuk.)

Három kúpot fogunk vizsgálni: az R alapkör sugarú, M csúcsú, V_1 térfogatú kúpot; az r alapkör sugarú, M csúcsú, V_2 térfogatú kúpot, valamint az ellipszis alapú, M csúcsú, V_3 térfogatú kúpot.



3. ábra



4. ábra

Ezekre

$$V_1 = \frac{R^3\pi c}{3}, \quad V_2 = \frac{r^3\pi c}{3}, \quad V_3 = \frac{ab\pi m}{3}.$$

Mivel az *EPC* és *FPA* háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{EP}{FP} = \frac{CP}{AP} = \frac{r}{R}.$$

Az ellipszis kistengelye a tengelymetszet síkjára merőleges, azt *K*-ban döfi, benne fekszik továbbá a csonkakúp

$$\frac{R+r}{2}$$

sugarú középkörének síkjában, így $KH = r$, $KJ = R$ és a magasságtétel miatt $b = \sqrt{Rr}$.

A *PMM'* és a *PAF* hasonlóak, valamint hasonlóak az *EPC, FAP* és *C'AC* háromszögek is, így

$$\frac{m}{R} = \frac{MP}{PA} = \frac{ME + EP}{PA} = \frac{cr + \frac{r}{R+r}\cdot c\cdot(R-r)}{\frac{R}{R+r}\cdot 2a} =$$

$$= cr\cdot\frac{(R+r)+(R-r)}{2Ra} = \frac{c\cdot r}{a},$$

ahonnan

$$m = \frac{c\cdot Rr}{a}.$$

A feladatbeli térfogatarány:

$$\frac{V_1 - V_3}{V_3 - V_2} = \frac{5}{2}.$$

Ebből

$$2V_1 + 5V_2 = 7V_3.$$

Behelyettesítve a megfelelő képletekbe, majd

$$\frac{c\cdot\pi}{3}\text{-mal}$$

osztva kapjuk, hogy

$$2R^3 + 5r^3 = 7\sqrt{R^3r^3},$$

ahonnan

$$2\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 7\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^3} + 5 = 0.$$

Ennek a feladat szempontjából megfelelő gyöke:

$$\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^3} = \frac{5}{2}.$$

Így a keresett arány:

$$\frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}84.$$

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 6.

223. Igazoljuk, hogy az $\{x^2\} + \{y^2\} = \{z^3\}$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a nem egész racionális számok körében. ($\{a\}$ az a szám törtrészét jelöli.)

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Ha a, b és c pozitív egészekre $a^2 + b^2 = c^2$ (azaz pitagoraszi számhármast alkotnak) valamint d 1-nél nagyobb pozitív egész szám, akkor az

$$x = \frac{a}{cd^3}, y = \frac{b}{cd^3} z = \frac{1}{d^2}$$

számok mind 1-nél kisebb pozitív racionális számok, és kielégítik a feladatbeli egyenletet, ugyanis

$$\{x^2\} + \{y^2\} = x^2 + y^2 =$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2 d^6} = \frac{c^2}{c^2 d^6} = z^3 = \{z^3\}.$$

Végtelen sok pitagoraszi számhármas van, és d tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész lehet, ami igazolja a feladat állítását.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 7.

224. Igazoljuk, hogy ha m és n tetszőleges nullától különböző egész számok, akkor az

$$n(x^2 + y^2 - z^2) = mxy \qquad (1)$$

egyenletnek végtelen sok olyan pozitív egészekből álló (x, y, z) megoldása van, amelyekre teljesül, hogy $(x, y, z) = 1$, azaz x, y és z legnagyobb közös osztója 1.

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Feltehetjük, hogy (1)-ben $n > 0$. Könnyen látható, hogy ha $(x; y; z)$ megoldása (1)-nek, és x, y és z legnagyobb közös osztója d, akkor az

$$x_0 = \frac{x}{d}, \quad y_0 = \frac{y}{d}, \quad z_0 = \frac{z}{d}$$

is megoldás. Nevezzük az ilyen $(x_0; y_0; z_0)$ megoldásokat alapmegoldásoknak. Azt kell bizonyítani, hogy végtelen sok pozitív egészekből álló alapmegoldás van.

Keressük (1)-nek olyan megoldásait, amelyekre $z = |kx - y|$ teljesül, ahol k 1-nél nagyobb pozitív egész. Ezzel

$$n(x^2 + y^2 - |kx - y|^2) = mxy$$

$$n(x^2 + y^2 - k^2x^2 + 2kxy - y^2) = mxy$$

$$(1 - k^2)x^2 + 2kxy = \frac{m}{n} \cdot xy$$

$$(1 - k^2)\frac{x}{y} + 2k = \frac{m}{n}.$$

Innen

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{m}{n} - 2k}{1 - k^2} = \frac{2kn - m}{n(k^2 - 1)}.$$

Ha a $k > 1$ mellett $k > \frac{m}{2n}$ is teljesül, akkor a tört számlálója is, nevezője is pozitív. Legyen

$$x_k = 2kn - m, \; y_k = n(k^2 - 1), \; z_k =$$

$$= |kx_k - y_k| = |k^2 n - km + n|.$$

Ha

$$k > \max\left(1; \frac{m}{2n}\right),$$

akkor e számhármasok mindhárom tagja pozitív egész, végtelen sok van belőlük, és egyszerű számolással adódik, hogy (1)-nek megoldásai. Már bizonyítottuk, hogy minden $(x_k; y_k; z_k)$ megoldáshoz tartozik egy $(x_{k_0}; y_{k_0}; z_{k_0})$ alapmegoldás. Könnyen látható, hogy az $(x_k; y_k; z_k)$ és $(x_l; y_l; z_l)$ megoldások pontosan akkor határozzák meg ugyanazt az alapmegoldást, ha

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{x_l}{y_l}.$$

Az $\frac{x_k}{y_k} = \frac{2kn - m}{n(k^2 - 1)} = c \;\; (c > 0)$

egyenletből a $cnk^2 - 2nk - cn + m = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk k-ra. Ennek legfeljebb két k érték tesz eleget, így legfeljebb két különböző k esetén lesz az $\frac{x_k}{y_k}$ értéke ugyanaz a rögzített c szám. Így legfeljebb két különböző $(x_k; y_k; z_k)$ megoldáshoz tartozik ugyanaz az $(x_{k_0}; y_{k_0}; z_{k_0})$ alapmegoldás. Mivel az $(x_k; y_k; z_k)$ pozitív egész tagú számhármasok végtelen sokan vannak, ezért az alapmegoldások is végtelen sokan vannak, és ezt kellett belátni.

Kiss Zoltán, Pécs

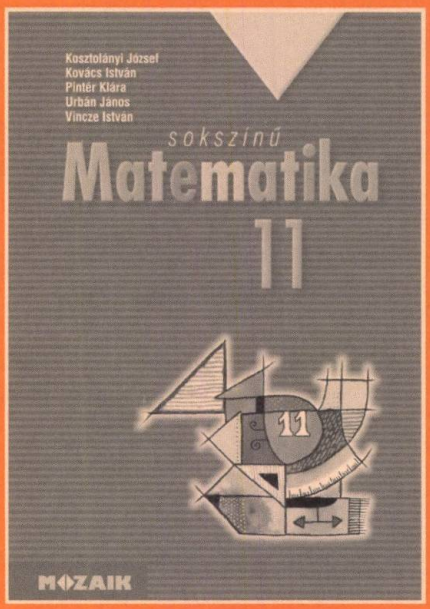
A megoldók száma: 5.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (221., 223.); Dályay Pál Péter, Szeged (210., 220-224.); Kamarás Lajos, Pécs (220-223.); Kiss Zoltán, Pécs (210., 220-224.); László Sándor, Szombathely (221.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (210., 221-224.); Varga Éva, Kecskemét (221.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (210., 220-224.); Zachar Zoltán, Tatabánya (210., 221-224.).

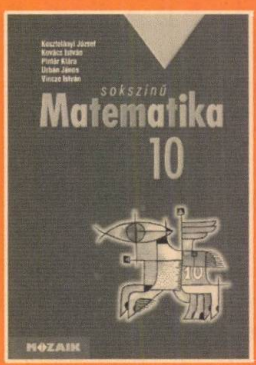
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD

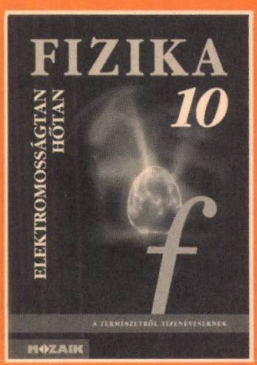
EGYEDÜLÁLLÓ SIKER A TANKÖNYVEK KÖZÖTT

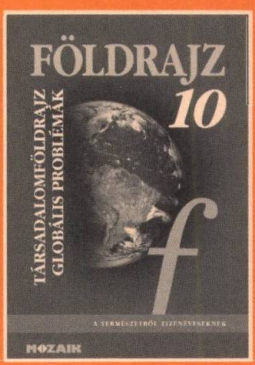
A matematikakönyvek között teljesen új arculatot hozó tankönyvcsalád megjelenése óta minden rangos díjat elnyert Magyarországon. A *Nemzetközi Könyvfesztivál Budai-díja*, a *Szép Magyar Könyv 2001 verseny díja* és *különdíja* mellett 2003-ban a *Hundidac Arany díját* is megkapta. A 2004-ben a 12. osztályos kötettel kiegészülő sorozat különlegességei: a gyakorlatias feldolgozásmód, a sokszínű és gazdag feladatanyag, valamint a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

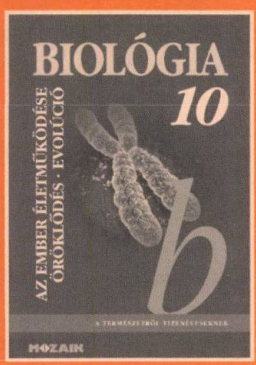


A 2003-BAN HUNDIDAC ARANY DÍJAT NYERT KÖTETEK









MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK
www.mozaik.info.hu